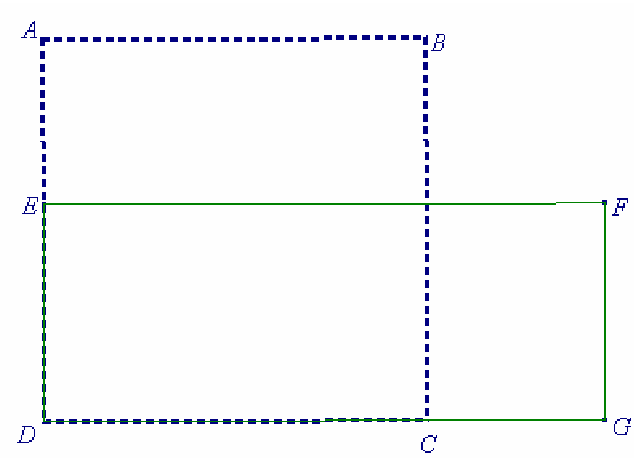
ESD 2012 – 13 : Problèmes amenant à la résolution d'équations

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Le dessin ci-contre représente une figure composée d'un carré *ABCD* et d'un rectangle *DEFG*.
E est un point du segment *[AD]*.
C est un point du segment [*DG*].
Dans cette figure, la longueur *AB* peut varier mais on a toujours *AE* = 15 cm et *CG* = 25 cm.



1. Dans cette question, on suppose que *AB* = 40 cm.
1.1. Calculer l'aire du carré *ABCD*.
1.2. Calculer l'aire du rectangle *DEFG*.

2. Peut-on trouver la longueur *AB* de sorte que l'aire du carré *ABCD* soit égale à l'aire du rectangle *DEFG* ?
Si oui, calculer *AB*. Si non, expliquer pourquoi.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de la recherche. Elle sera prise en compte.

B. La réponse de trois élèves à la question 3

Elève 1 : J'ai fait un tableau avec plusieurs valeurs, on voit que les deux aires vont être égales à un moment.

AB	40	30	35
aire du carré *ABCD*	1600	900	1225
aire du rectangle *DEFG*	1625	825	1200

J'ai essayé pile entre 35 et 40 : 37,5. C'est la bonne réponse !

Elève 2 : J'ai appelé *I* l'intersection de (*EF*) et (*BC*). Les deux aires sont égales si les rectangles *ABIE* et *CGFI* ont la même aire. Il faut donc que 15×*AB* = 25×*GF*. C'est vrai pour *AB* = 5 et *GF* = 3.
Donc il y a bien une solution.

Elève 3 : Pour que les deux figures aient la même aire, il faut au moins qu'elles soient toutes les deux des carrés, mais ça n'est pas possible. Le problème n'a pas de solution.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des trois élèves, et indiquez pour chacun comment vous pourriez l'aider à améliorer son raisonnement.

2. Proposez une correction de la question 2 telle que vous la présenteriez à des élèves de collège.

3. Présentez deux ou trois problèmes pouvant conduire à la résolution d'équations.

2. Eléments de correction

L'exercice propose une situation issue du domaine géométrique et pouvant se résoudre à l'aide du choix d'un paramètre (la longueur *AB*, explicite dans l'énoncé) et d'une mise en équation.
La question 1 est censée « mettre les élèves en situation » en montrant comment se calculent les aires de *ABCD* et de *DEFG*. Sa présence dans l'énoncé est cependant discutable, car elle attribue une valeur numérique à la longueur *AB* alors que, justement, on voudrait que les élèves désignent littéralement cette longueur. De plus, la valeur choisie, 40 cm, est très voisine de la valeur solution. De là à deviner la solution « a visto de nas », il n'y a qu'un pas.

1. Analyse des travaux d'élèves

<table>
<tr><td></td><td>Compréhension</td><td>Réalisation</td><td>Communication</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 1</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>Oui</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cet élève met en place une solution empirique en essayant quelques autres valeurs pour compléter les résultats de la question 1, ce qui lui permet de résoudre le problème en trois coups de cuillère à pot. Pour $AB = 40$ gj 2013 , le rectangle a une aire plus grande que celle du carré et pour $AB = 30$, c'est le carré : cet élève a dès lors l'intuition de l'existence d'une valeur intermédiaire d'équilibre. Il remarque probablement que pour $AB = 35$ l'écart entre les deux aires est de 25 cm^2, comme pour $AB = 40$ mais en sens inverse. Il essaie donc logiquement la valeur moyenne.
Objectivement, il est difficile « d'améliorer » cette solution, cet élève n'a besoin d'aucune aide. Il appartient à l'enseignant de choisir sa situation de façon à mettre en échec ce type de solution empirique. Il faudrait supprimer la question 1 ou, au minimum, proposer une valeur numérique beaucoup plus éloignée de la valeur solution. On peut penser que les essais de l'élève seraient moins bien ciblés et alors seulement on pourrait lui suggérer de trouver des formules permettant le calcul des aires « pour n'importe quelle valeur de AB ».</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 2</td><td>Oui</td><td>Non. A su délimiter le problème à résoudre mais échoue dans son traitement numérique.</td><td>Oui</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cet élève a une bonne vision de la situation. Il sait compléter une figure en définissant correctement un point utile qui n'est pas cité par l'énoncé (le point I) et effectue une analyse pertinente de la figure. Cette analyse lui permet de réduire le problème à celui de la comparaison de deux rectangles dont les aires sont plus faciles à calculer (on exploitera son idée …).
Sa résolution échoue car il ne voit pas que les longueurs GF et AB sont deux grandeurs liées.
Pour aider cet élève, on peut lui demander de construire sa figure solution (il devrait s'apercevoir que c'est impossible avec $AB = 5$) puis lui demander si les longueurs GF et AB peuvent être choisies « comme on veut » et surtout peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 3</td><td>Non</td><td>Non</td><td>Oui</td></tr>
<tr><td colspan="3">La notion d'aire, dans le sens d'une grandeur permettant de mesurer l'étendue d'une figure indépendamment de sa forme, ne semble pas acquise par cet élève. Selon lui, deux figures ne peuvent avoir la même aire que si elles sont isométriques.
Une aide consisterait à essayer de lui faire comprendre que deux figures peuvent ne pas être isométriques et avoir des aires égales. Après, on verra …</td></tr>
</table>

2. Une correction de la question 2

Cette correction peut s'articuler autour d'une analyse du texte de l'énoncé, et en particulier autour de trois questions préalables à son propos :
1. Comment traduire mathématiquement le fait que « la longueur *AB* peut varier » ?
2. Compte tenu que « on a toujours *AE* = 15 cm et *CG* = 25 cm », peut-on choisir n'importe quelle longueur *AB* ?
3. Peut-on exprimer les dimensions utiles à la résolution de l'exercice *en fonction* de *AB* ?

1. Un moyen d'exprimer que « *AB* peut varier » est de désigner cette longueur *AB* par une lettre : *x* désigne une grandeur variable, que l'on ne connaît pas mais que l'on se propose de calculer sous certaines contraintes, on posera : $x \underset{gj\,2013}{=} AB$.

2. Le fait que « *E* est un point du segment [*AD*] » et que « on a toujours *AE* = 15 cm » impose que : $x \geq 15$,
Le fait que « *C* est un point du segment [*DG*] » et que « *CG* = 25 cm » n'impose en revanche aucune condition.

3. Quant aux « dimensions utiles », elles dépendent des figures géométriques dont on veut calculer les aires :

Solution 1
On s'en tient scrupuleusement au texte de l'énoncé, en calculant les aires du rectangle et du carré. Les « dimensions utiles » sont *DE* et *DG*. Des expressions $DE = x - 15$ et $DG = x + 25$, on déduit que l'aire du rectangle est égale à $(x-15)\times(x+25) = x^2 + 10x - 375$ tandis que l'aire du carré *ABCD* est x^2 .
Il s'agit de résoudre l'équation $x^2 + 10x - 375 = x^2$

Solution 2
On valorise et on développe l'idée de l'élève 2 : puisque le rectangle et le carré ont une partie commune, il suffit de s'intéresser aux aires des parties non communes, ce qui amène à définir le point *I*. « Les deux aires sont égales si les rectangles *ABIE* et *CGFI* ont la même aire » comme le dit l'élève 2. Il y a dans ce cas une seule « dimension utile » à exprimer, c'est $GF = DE = DA - EA = x - 15$ (la longueur *GF* n'est pas indépendante de *AB* fera-t-on remarquer à l'élève 2).
Les aires des rectangles *ABIE* et *CGFI* sont respectivement $15x$ et $25(x-15)$.
Il s'agit de résoudre l'équation $15x \underset{gilbertjulia\,2013}{=} 25(x-15)$.

La première solution amène à des expressions où figure « le carré de *x* » mais cela n'a pas d'incidence majeure car ce « carré de *x* » s'élimine dans l'équation, tandis que la deuxième solution amène à des expressions du premier degré car les deux rectangles *ABIE* et *CGFI* ont un côté dont la longueur est fixe.

On fait apparaître que dans les deux cas, on aboutit après traitement algébrique à l'équation $10x = 375$. On finit par une vérification[1] de l'égalité des aires lorsque $AB = 37{,}5$ cm (1406,25 cm^2 pour le rectangle et le carré et 562,5 cm^2 pour leurs parties non communes).

3. Voir REDCM pages 89 à 91 puis pages 98 et 99.

[1] On peut envisager une utilisation en classe entière d'un logiciel de géométrie en fin de correction pour visualiser la solution auprès des élèves (mais le candidat n'a pas à le faire lui-même devant le jury, le temps de préparation est trop compté). En début d'étude, pour remplacer la question 1, son utilisation ne serait pertinente que si la longueur *AB* n'est jamais apparente à l'écran (il ne faudrait pas mettre en évidence prématurément la valeur solution).