ESD 2012 – 12 : Géométrie plane

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Tracer un cercle de centre *O*, et placer un point *A* à l'intérieur du disque ainsi défini. Choisir un point *M* sur le cercle, et construire le symétrique *M'* de *A* par rapport à *M*. Recommencer avec d'autres points du cercle. Que fait *M'* quand *M* parcourt le cercle ?
On pourra construire le symétrique de A par rapport à O.

B. Un extrait du préambule des programmes de collège

1. Divers aspects d'une démarche d'investigation.
Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales et en technologie) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances, de compétences méthodologiques et sur la mise au point de savoir-faire techniques.[...]
Une séance d'investigation doit être conclue par des activités de synthèse et de structuration organisées par l'enseignant, à partir des travaux effectués par la classe. Celles-ci portent non seulement sur les quelques notions, définitions, résultats et outils de base mis en évidence, que les élèves doivent connaître et peuvent désormais utiliser, mais elles sont aussi l'occasion de dégager et d'expliciter les méthodes que nécessite leur mise en œuvre.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Proposez le scénario d'une séance permettant d'engager les élèves dans une démarche d'investigation prenant appui sur l'exercice.

2. Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de collège.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème géométrie plane, dont l'un au moins peut être le support d'une démarche d'investigation.

2. Eléments de correction

Cet exercice a pour objectif la recherche d'un lieu géométrique. La situation se prête à une démarche d'investigation d'une part par la tournure de l'énoncé (« que fait *M'* » est volontairement très évasif sur le type de réponse attendue) et d'autre part parce que le lieu géométrique en question oppose quelques difficultés, il n'est pas directement apparent : il s'agit d'un cercle dont le centre n'est pas sur la figure initiale et dont le rayon est différent du rayon du cercle initial.

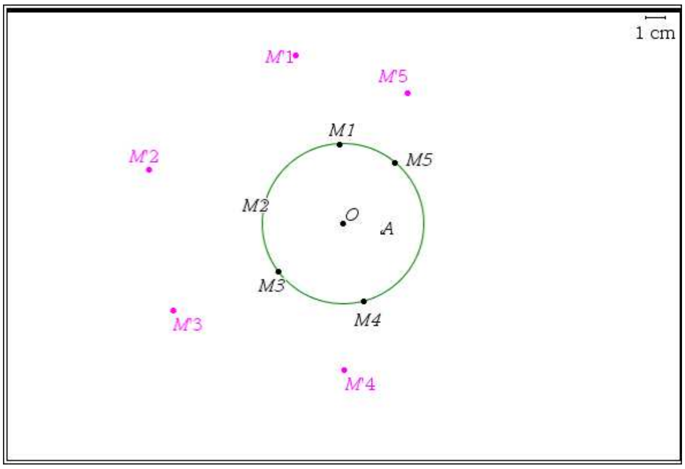
1. Scénario proposé :

Je me place délibérément dans le cas où les élèves n'ont pas encore traité de problème de lieu géométrique, pour développer à cette occasion un scénario de « découverte[1] » de la notion de lieu géométrique.

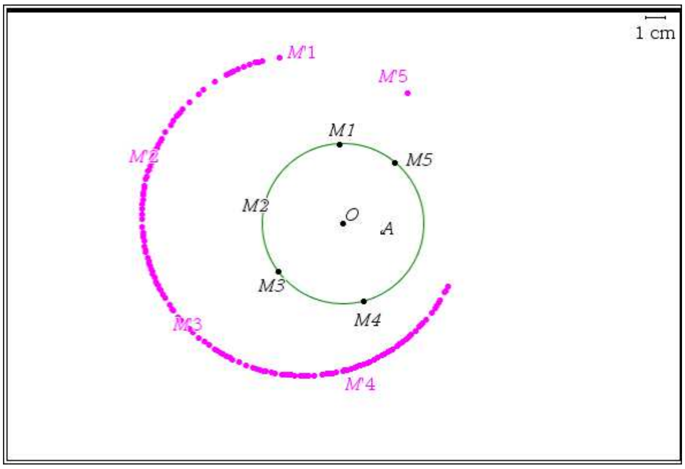
Les élèves sont par groupes de deux, chaque groupe dispose d'un ordinateur équipé d'un logiciel de géométrie dynamique. Chaque groupe se munit aussi d'une fiche sur laquelle il notera ses observations.

[1] Cependant, ce n'est pas cet exercice que je choisirais comme « découverte » avec des élèves de collège, en raison des difficultés que présente la situation pour une première approche. Je préfèrerais un exercice où le lieu soit plus apparent mais, si possible, où un cas d'exclusion ou de limitation (type cercle privé d'un point, ou segment d'une droite, …) valorise l'étude d'une réciproque.

Phase 1. Consigne : Proposer le texte de l'exercice tel qu'il est rédigé, mais sans l'indication du symétrique de A par rapport à O. Chaque groupe construit la figure : un cercle (C) de centre O (dont on notera r le rayon) gj2013 , le point M est défini comme étant un « point sur le cercle » et M' est construit à l'aide de l'outil **Transformations : symétrie**.
On indique oralement qu'il faut construire les images d'au moins cinq points de (C). Les élèves sont invités à déplacer l'un quelconque de ces points et à observer ce qu'il se passe.

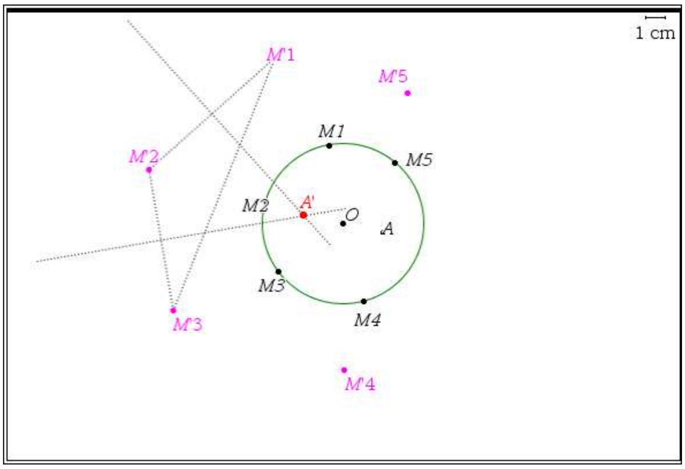


On peut éventuellement procéder à un bref sondage d'opinion (dont on n'attend pas nécessairement des conjectures très élaborées : « M' bouge quand M bouge » …). L'idée de cercle peut émerger mais ce n'est pas certain.



Faire activer la **Trace géométrique** du point M' et déplacer le point M. (Si les élèves n'ont pas encore utilisé cet outil, on peut leur expliquer que la « Trace géométrique » va laisser sur l'écran l'empreinte du passage du point M').

Mise en commun et conjectures. Le fait que M' se trouve toujours sur un cercle « plus grand que (C) et décentré » devrait émerger. Il reste à préciser quel est ce cercle.



Phase 2 : Consigne : Déterminez le cercle sur lequel semble toujours se trouver M'. Vous devez en placer le centre et en déterminer le rayon.

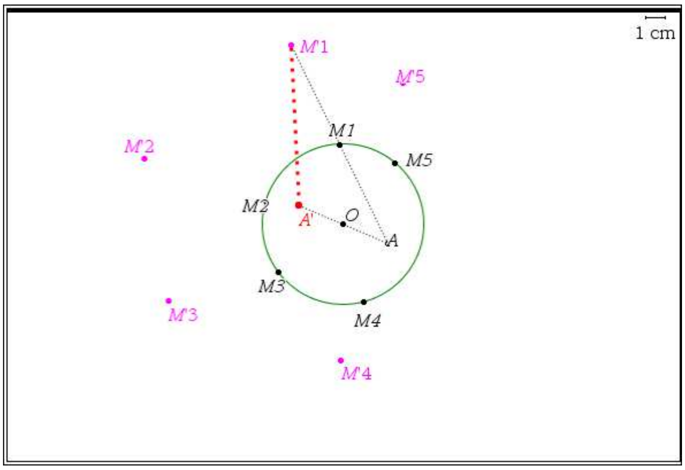
On peut aider les élèves en demandant « de combien de points M' a-t-on besoin pour pouvoir obtenir le centre du cercle passant par tous ces points ? » Ou bien « y a-t-il sur le cercle de centre O des points M dont il serait intéressant de construire l'image M' ? »

Les élèves peuvent utiliser trois points et construire le centre du cercle circonscrit au triangle obtenu (les élèves peuvent vérifier si ce cercle semble passer aussi par les autres points M'). Ils peuvent aussi utiliser les images des deux points intersections de la droite (OA) avec (C), s'ils conjecturent qu'il s'agit là d'un diamètre du cercle.

On attend essentiellement la conjecture : « Il semble que le centre du cercle sur lequel semble se trouver M' soit le symétrique de A par rapport à O » et une conjecture comparant les rayons des deux cercles.

Phase 3 : **Démonstration des conjectures**.

Consigne : Justifiez vos conjectures. Rédigez sur votre fiche votre réponse. Pour vous aider, vous pouvez compléter la figure par de nouveaux tracés ou de nouvelles constructions.



Il faut que le point *A'* symétrique de *A* par rapport à *O* apparaisse sur la figure, ainsi que, au minimum, le segment [*A'M'*].

Les élèves ont maintenant les cartes en mains pour analyser la figure et rédiger leur démonstration.

Mise en commun : on attend la conclusion : Quel que soit le point *M* sur le cercle (C), $A'M' \underset{gj2013}{=} 2AM = 2r$; *M'* appartient toujours au cercle (C') de centre *A'* et de rayon $2r$.

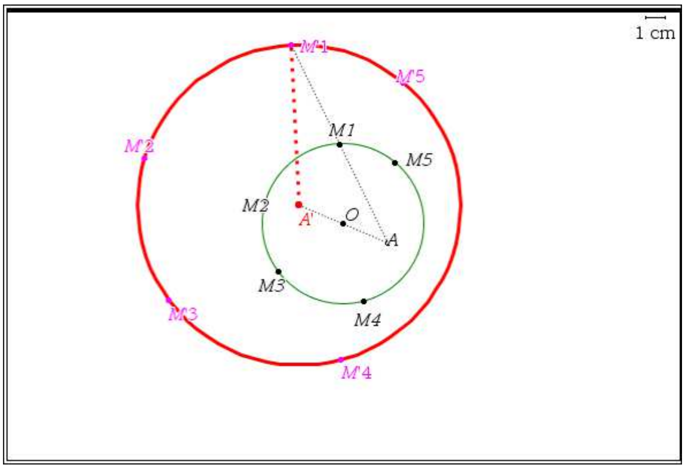
Phase 4 : Etude d'une réciproque.

Consigne : Placez un point *U* sur (C'). Vérifiez si on peut lui associer un point *M* sur (C) dont *U* est le point *M'*.

On attend que les élèves considèrent le milieu de [*AU*] et justifient que ce point est bien un point *M* de (C) dont *U* est le point *M'*.

Phase 5 : Structuration.

On assemble les différents éléments de la correction de l'exercice issus des phases 3 et 4.



On définit la notion de lieu géométrique, ce qui précise ce qui était réellement attendu en demandant « que fait *M'* ». L'outil « lieu géométrique » du logiciel est activé (mais seulement maintenant dans la séance), c'est l'occasion d'en découvrir le mode d'emploi.

On peut enfin préciser le rôle de chaque phase de la séance : émission de conjectures, démonstrations. La phase 3 a pour objectif de dégager des propriétés concernant *M'* et permettant de le situer sur une ligne géométrique (C'). La phase 4 traite le problème à rebours, quand on part d'un point de (C') pour savoir si tout point de (C') est bien un point *M'*.

Variante *:* Comme le sous-entend l'exercice proposé, on peut commencer par demander aux élèves de construire la figure sur leur brouillon *à la main* et placer *M'* pour quatre ou cinq positions de *M* réparties à leur guise sur le cercle, de façon à ce que ceux-ci s'approprient mieux la situation. On effectue alors des allers-retours entre l'écran et la figure sur papier (phase 2 sur papier notamment).

2. Correction.
On considère lorsqu'il est non aplati le triangle *AA'M'*. Les points *A'* et *M'* étant les symétriques de *A* respectivement par rapport à *O* et par rapport à *M*, le point *O* est le milieu du côté [*AA'*] et le point *M* est le milieu du côté [*AM'*]. D'après le théorème des milieux, $A'M'=2AM$. Puisque *M* appartient au cercle (C) : $A'M'=2r$ ce qui établit que le point *M'* appartient toujours au cercle (C') de centre *A'* et de rayon $2r$.

Puis on traite les cas « d'aplatissement » qui sont de deux sortes :

- Le cas où $A=O$, plus facile que le cas général car alors $OM'=2OM=2r$: *M'* est toujours sur le cercle de centre *O* de rayon $2r$, ce qui reste dans la généralité puisque $A'=A=O$.
- Les cas des intersections *I* et *J* de (*OA*) avec (C) (dans l'ordre d'alignement *I, A, O, A', J* qui implique l'ordre d'alignement *I', I, A, O, A', J, J'*). On vérifie que $A'I'=A'A+AI'=2OA+2AI \underset{gilbertjulia2013}{=} 2OA+2(r-OA)=2r$ et *I'* rentre donc la généralité (idem pour *J'*).

Réciproquement, si *U* est un point de (C') (donc si $A'U=2r$) alors si $U=I'\ ou\ J'$, c'est réglé, et sinon :
Si on considère le milieu *M* du segment [*AU*], *O* et *M* sont les milieux respectifs de deux côtés du triangle *AA'U* et donc, d'après le théorème des milieux, $OM=\frac{1}{2}A'U=r$, le point *M* est un point de (C) dont *U* est le point *M'* : par conséquent, tous les points de (C') sont des points *M'*. Le lieu géométrique de *M'* est le cercle (C') en entier.

3. Le sujet « géométrie plane » est vaste. A titre d'exemple, les problèmes de construction, dont la problématique suit celle des lieux géométriques, ou bien les problèmes de longueur minimum ou d'aire maximum se prêtent bien à une démarche d'investigation. Voir (entre autres sources) REDCM pages 20 à 22 puis de la page 49 à la page 67.

3. Remarques

1. Nous avons développé à l'occasion de cet exercice une méthode de « double inclusion » (voir REDCM pages 62 à 64). Cependant les élèves peuvent rester sceptiques à propos de l'utilité de la partie « réciproque » parce que, justement, le lieu de *M'* est la totalité de (C'), sans restriction. Le professeur de la classe concernée devra, un jour ou l'autre, proposer un exercice de lieu géométrique où des cas d'exclusion ou de limitation apparaissent.

2. Dans l'hypothèse où les élèves connaissent déjà l'outil « lieu géométrique » de leur logiciel, il n'y a aucune raison de s'en priver. Les élèves peuvent alors employer cet outil dès le début (ce qui revient à passer directement à la phase 2). L'investigation consistera à identifier le lieu géométrique en tant que cercle dont il s'agira de construire le centre *A'* comme ci-dessus et à comparer le rayon à celui de (C). Au lieu de faire bouger le point *M*, ce sera le point *A* que l'on déplacera (comment évolue *A'*) et le cercle (C) dont on modifiera le rayon (que fait celui de (C')). Le scénario de la séance en est évidemment raccourci. Au candidat de choisir sa voie.

3. La même situation pourra être revisitée plus tard au lycée avec *l'outil des transformations,* une homothétie en l'occurrence. L'étude d'une réciproque s'avèrera alors inutile : *M* décrivant (C) en entier, le point *M'* décrira l'image de (C) en entier.