ESD 2012 – 09 : Probabilités

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.
Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1; 1; 2; 3; 4; 4.
Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2; 2; 3; 4; 5; 5.

1. Combien y a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?

2. Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

B. La solution proposée par trois élèves

Élève 1
1. Il y a 36 issues équiprobables car les deux dés ont 6 faces chacun.
2. "la somme est supérieure à 7" est le contraire de l'événement "la somme est inférieure à 7".
Ainsi $p(S < 7) = 1 - p(S > 7)$ et donc $p(S < 7) = p(S > 7) = 0,5$.

Elève 2
1.

Dé rouge	1	1	2	3	4	4
Dé noir	2	2	3	4	5	5
Somme	3	3	5	7	9	9

Les sommes probables sont donc 3, 5, 7 et 9. Il n'y a pas équiprobabilité car 3 arrive 2 fois et 5 une fois.

2. On obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 (dans 4 cas) qu'une somme supérieure ou égale à 7 (dans 3 cas).

Elève 3
1. Il y a 7 issues probables : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La loi de probabilité est équirépartie car les dés sont équilibrés.

2. À l'aide d'un arbre, je vois qu'on obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 (dans 28 cas) qu'une somme supérieure ou égale à 7 (dans 13 cas).

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises dans le domaine des probabilités et en précisant l'origine de ses éventuelles erreurs.

2. Proposez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « **probabilités** », dont l'un au moins nécessite la mise en oeuvre d'une simulation à l'aide d'un tableur.

2. Eléments de correction

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés d'une expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés. La première question fournit une occasion de se pencher sur la notion d'espace probabilisé et de variable aléatoire défini sur cet espace. La question 2 devrait être prétexte à un débat concernant la traduction mathématique, en langage des probabilités, de la notion commune « telle chose se produit plus souvent que telle autre ».

1. Analyse des travaux d'élèves

		Réussites	Echecs	Causes possibles
Elève 1	Q1.	Réponse correcte bien que sa justification soit maladroite, il parle de dés « à 6 faces » sans référence à un « équilibrage » (cet élève choisit implicitement l'univers Ω_1).	Il n'a probablement proposé aucune schématisation (il n'a pas identifié les 36 « issues », ce qui va l'empêcher de calculer l'une ou l'autre des probabilités de Q2)	Est-ce que pour lui tous les dés à six faces sont équilibrés (?)
	Q2	Connaît la formule liant les probabilités de deux évènements contraires	Réponse incorrecte. Les deux évènements cités par cet élève ne sont pas contraires, ils ne réalisent pas une partition de Ω_1.	Soit il pense que deux évènements contraires ont toujours des probabilités égales, soit il a confondu les symboles < et > et a cru devoir résoudre l'équation $x_{gj2013} = 1 - x$.
Elève 2	Q1	Aucune	Modélisation incorrecte par un univers à six issues (comme si les dés étaient liés).	N'a pas acquis la notion implicite d'univers produit
	Q2	Sait qu'en cas de loi équirépartie la probabilité d'un évènement est proportionnelle au nombre d'issues.		La réponse donnée à cette question est compatible avec la modélisation qu'il a faite de l'expérience
Elève 3	Q1	Semble avoir répondu à deux questions différentes : les « issues » sont pour lui les valeurs prises par la variable aléatoire « somme des numéros ». Mais il travaille, semble-t-il, avec l'univers Ω_1 sur lequel il y a bien équiprobabilité.	N'a pas su communiquer sa réponse. Si l'on interprète son texte à la lettre, la « loi de probabilité » se rapporterait aux sommes obtenues (plutôt « possibles » que « probables »).	L'ambiguïté de l'énoncé a provoqué celle de sa réponse. L'équiprobabilité dont il parle ne semble pas se rapporter aux sommes obtenues, mais bien à son univers Ω_1.
	Q2	Il a schématisé correctement à l'aide très certainement d'un arbre à 36 branches. Réponse correcte.		Sa réponse pertinente à cette question montre que cet élève a été déconcerté par la consigne de la question précédente.

2. Une correction de l'exercice.

Le professeur qui a posé cet exercice doit faire amende honorable : la question 1 est mal posée (il est manifeste par exemple que l'élève 3 a compris la situation et sait la traiter mais n'a pas compris la consigne) ; « Définir un espace probabilisé permettant de décrire la situation » serait une formulation préférable. Peut-être est-ce volontaire, de façon à créer un questionnement à propos de la signification du mot « issue » (En tout état de cause, il appartenait au candidat de lever ce lièvre).

Tout dépend de la modélisation que l'on choisit pour décrire l'expérience. Il y a donc plusieurs réponses possibles.

Modélisation 1 :

Un premier univers Ω_1 susceptible de décrire la situation est l'ensemble des 36 couples de faces $(r_i\ ; d_j)$ muni de la loi équirépartie. Une « issue » est donc un couple de faces « dé rouge / dé noir ».

Pour cette modélisation, on peut s'appuyer sur les travaux des élèves 1 et 3.

On peut en effet schématiser cet univers soit par un arbre à 36 branches comme l'a fait probablement l'élève 3 soit (ce qui apparaîtra plus pratique) par un tableau 6×6, comme ci-dessous. L'avantage de ce choix est que, la loi de probabilité sur cet univers étant équirépartie, la probabilité d'un évènement est proportionnelle au nombre d'issues qui le réalisent.

	1	**1**	**2**	**3**	**4**	**4**
2	3	3	4	5	6	6
2	3	3	4	5	6	6
3	4	4	5	6	7	7
4	5	5	6	7	8	8
5	6	6	7	8	9	9
5	6	6	7	8	9	9

Modélisation 2 :

Un deuxième univers Ω_2 est l'ensemble des 16 couples $(x_i\ ; y_i)$ de numéros observés. Une « issue » est un couple de numéros observés. On peut aussi schématiser cet univers soit à l'aide d'un arbre, soit à l'aide d'un tableau. Pour obtenir cette modélisation, on peut s'appuyer sur le travail, très rudimentaire certes, de l'élève 2 : cet élève a tenu compte des différents numéros, mais il faut arriver à faire « croiser » les numéros du dé rouge avec ceux du dé noir.

Avantage : le nombre « d'issues » est plus petit. Si on choisit la schématisation par un arbre, cet arbre possède 16 branches (alors que l'arbre de l'élève 3 possède 36 branches, ce qui est à la limite de la faisabilité).
Inconvénient : la loi de probabilité sur cet univers n'est pas équirépartie puisque le numéro 1 rouge par exemple a une probabilité double de celle du numéro 3 rouge. Il faut donc la construire et déterminer, pour chaque issue, la probabilité qui lui sera affectée. Dans le cas d'une schématisation à l'aide d'un tableau, on est obligé de faire figurer dans chaque case la probabilité affectée. Cette fois, un arbre est plus pratique qu'un tableau, car il est commode de pondérer chaque branche de l'arbre par sa probabilité. Un exemple d'arbre est donné page suivante).

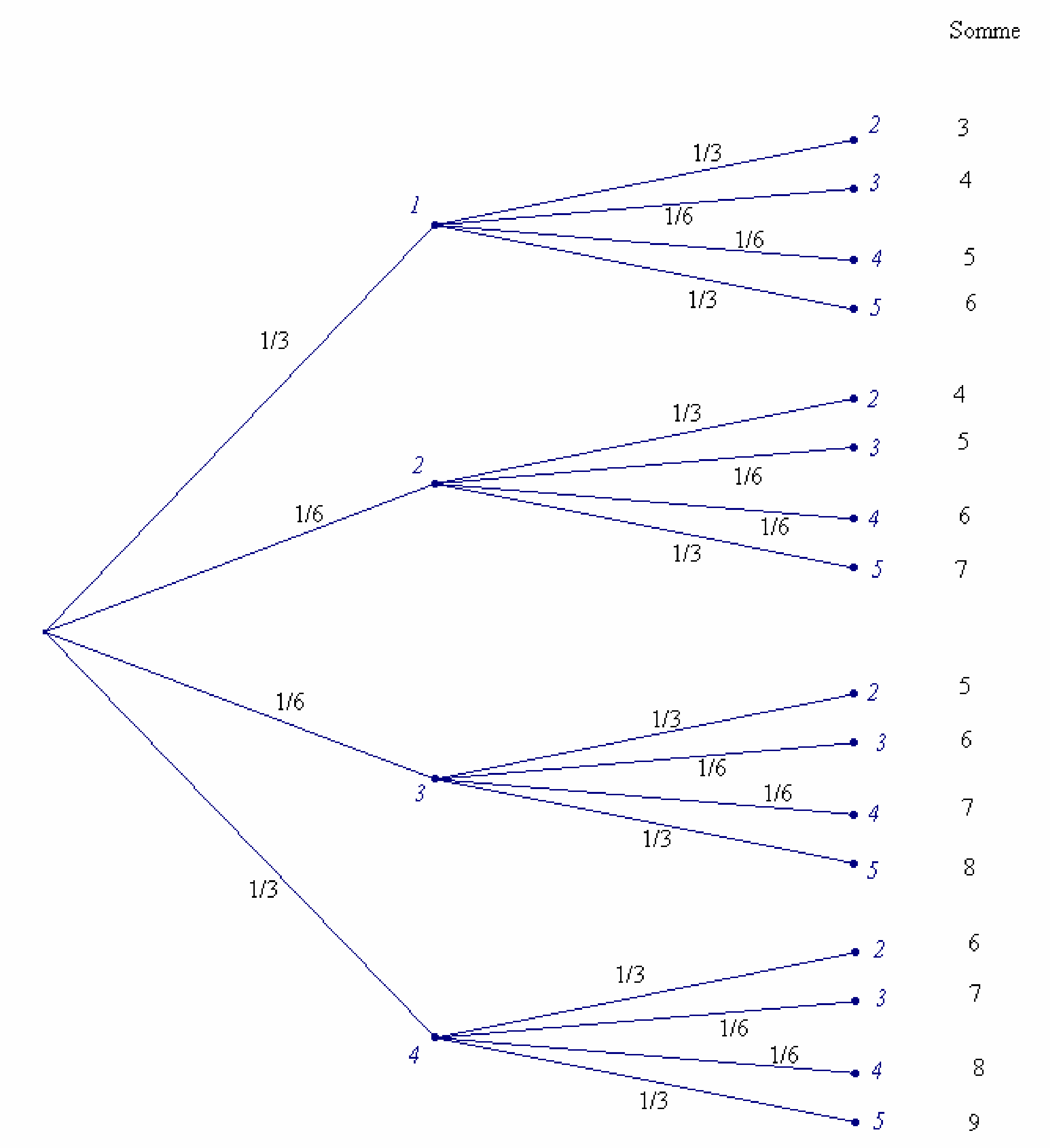
Modélisation 3 :

L'univers $\Omega_3 = \{3,4,5,6,7,8,9\}$ des sept sommes possibles. Il y a certes peu d'issues, mais on ne peut pas construire facilement une loi de probabilité sur cet univers. Il est nécessaire d'envisager, au moins implicitement, l'un ou l'autre des deux univers précédents pour construire la loi de probabilité sur Ω_3.

L'univers qui décrit le mieux l'expérience concrète semble être l'univers Ω_2 (les dés sont discernables puisque de couleur différente, tandis qu'à vue on ne peut pas distinguer quelle est la face apparente lorsqu'elle porte un numéro doublé).

Quelle que soit la modélisation choisie, on doit obtenir $P(S \geq 7)_{gilbertjulia2013} = \frac{13}{36}$ et $P(S \leq 7) = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

Un exemple d'arbre. On considère qu'on lit le résultat d'abord sur le dé rouge puis sur le dé noir. Les probabilités sur les branches de deuxième génération ont un statut de probabilités conditionnelles, l'indépendance des deux lancers justifie leur pondération.



3. Voir REDCM pages 180 à 203. Une simulation peut être utilisée soit pour conjecturer un résultat en début de résolution ou pour valider une réponse en fin de résolution (dans la série « obtient-on plus souvent … » par exemple) soit aussi pour fournir une banque de données (comme dans le dernier sujet de la session d'oral 2012).

3. Pour aller plus loin

3.1. Une critique de l'exercice

Dans la série des exercices « obtient-on plus souvent … » que l'on peut trouver dans tous les manuels, cet exercice ne me paraît pas très bien placé. On doit trouver sans trop de peine nettement mieux.

Outre l'ambiguïté déjà signalée *gilbertjulia* 2013 de la question 1, je trouve la situation artificielle (je mets au défi de trouver dans le commerce des dés ainsi numérotés) et sans grand intérêt.

De plus, la question 2 ne permet pas de discriminer les solutions incorrectes. L'élève 2 est d'accord pour dire qu'on obtient plus souvent moins de 7 que plus de 7. Un élève qui aurait modélisé par Ω_2 et qui dirait que « strictement moins de 7 arrive 10 fois et strictement plus de 7 n'arrive que 3 fois » serait d'accord lui aussi. De tels élèves donnent donc eux aussi une « bonne réponse » malgré une distribution de probabilité incorrecte et ne sont placés devant aucune contradiction.

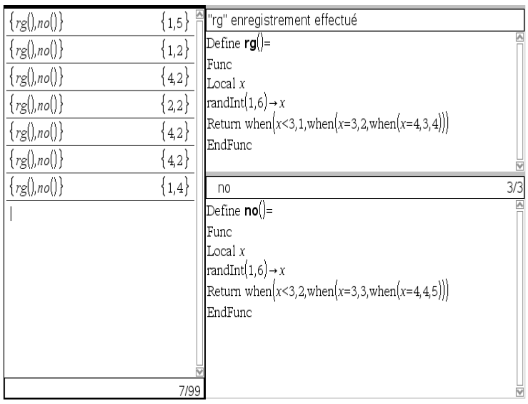
Dans cette situation, la question « obtient-on plus souvent plus de 6 que moins de 6 ? » serait plus pertinente.

Au candidat de corriger ce défaut dans l'un de ses propres exercices et de trouver une situation dans laquelle l'analyse probabiliste va contredire la « foi du charbonnier ».

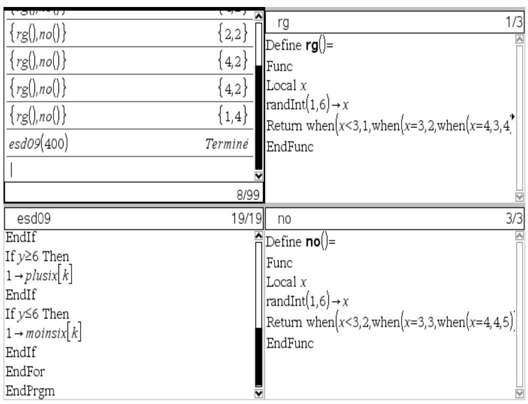
3.2. Une simulation … quand même

Vu la façon dont le sujet était posé, le jury attendait une simulation dans *un autre* exercice. Mais vous êtes ici pour vous entraîner !

Commençons par simuler un lancer du dé rouge et un lancer du dé noir.

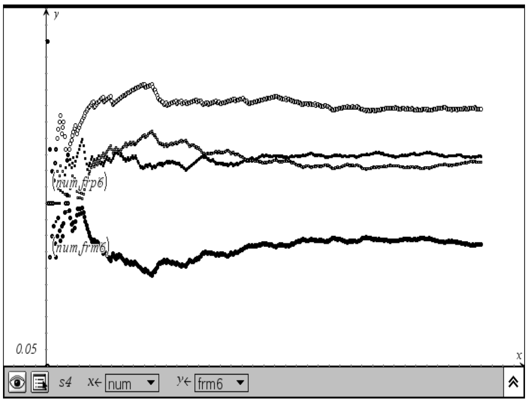


Le programme **esd09** muni d'un argument n simule une série de n expériences. Il crée quatre listes : **plusept** et **moinsept** enregistrent 1 si la somme des « dés » est supérieure ou égale (respectivement inférieure ou égale) à 7 et zéro sinon. Facultativement, **plusix** et **moinsix** enregistrent 1 si la somme des « dés » est supérieure ou égale (respectivement inférieure ou égale) à 6 et zéro sinon



		B plusept	C moins…	D plusix	E moinsix	F frp7	G frm7	H frp6	I frm6
◆	1,					=cumsum(	=cumsum(	=cumsum(	=cumsum(
1	1.	1.	0.	1.	0.	1.	0.	1.	0.
2	2.	0.	1.	0.	1.	0.5	0.5	0.5	0.5
3	3.	1.	0.	1.	0.	0.667	0.333	0.667	0.333
4	4.	0.	1.	0.	1.	0.5	0.5	0.5	0.5
5	5.	1.	0.	1.	0.	0.6	0.4	0.6	0.4
6	6.	0.	1.	0.	1.	0.5	0.5	0.5	0.5
7	7.	0.	1.	1.	1.	0.429	0.571	0.571	0.571
8	8.	0.	1.	0.	1.	0.375	0.625	0.5	0.625
9	9.	0.	1.	0.	1.	0.333	0.667	0.444	0.667
10	0.	1.	1.	1.	0.	0.4	0.7	0.5	0.6
11	1.	1.	1.	1.	0.	0.455	0.727	0.545	0.545
12	2.	0.	1.	0.	1.	0.417	0.75	0.5	0.583
13	3.	0.	1.	1.	1.	0.385	0.769	0.538	0.615
I4	=0.5								

Dans une page **Tableur**, on fait calculer les fréquences cumulées des évènements « obtenir une somme supérieure ou égale à 7 » et « obtenir une somme inférieure ou égale à 7 ». Facultativement, on fait la même chose pour les évènements « obtenir une somme supérieure ou égale à 6 » et « obtenir une somme inférieure ou égale à 6 ».



et enfin dans une page **Graphiques**, on trace les différents nuages de points représentant les fréquences. Il reste à les commenter. Les fréquences des évènements « obtenir une somme supérieure ou égale à 7 » et « obtenir une somme inférieure ou égale à 7 » sont « manifestement » différentes (mais vous devez devant le jury donner un sens à « manifestement » c'est-à-dire justifier votre conclusion à l'aide de fourchettes au seuil de confiance 95 % ; dire qu'un nuage est « beaucoup plus haut que l'autre[1] » ne suffit pas).

Quant aux évènements « obtenir une somme supérieure ou égale à 6 » et « obtenir une somme inférieure ou égale à 6 », une autre question se pose à leur propos : l'hypothèse « ces deux évènements ont des probabilités égales » est-elle une hypothèse *plausible* ?

[1] C'est ce que l'on dirait sommairement si l'on illustrait par cette simulation *gj*2013 une *phase de synthèse* avec des élèves. On ferait tracer les droite d'équation y =13/36 et y = 7/9 et on se contenterait de constater qu'il y a bien stabilisation des deux nuages au voisinage de ces droites, l'expérimentation confortant (on l'espère…) les résultats théoriques.