ESD 2012 –08 : Equations différentielles

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

L'exercice suivant a été donné en section de technicien supérieur (STS) :
Soit (E) l'équation différentielle : $y'+y=1-\mathrm{e}^{-x}$.
1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y'+y=0$.

2. Déterminer une fonction *u* définie et dérivable sur **R** telle que la fonction *h* définie sur **R** par $h(x)=u(x)\mathrm{e}^{-x}$ soit une solution de (E).

3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la fonction *g*, solution particulière de (E), vérifiant la condition initiale $g'(0)=0$

5. Déterminer les limites de *g* en $-\infty$ et $+\infty$.

6. Déterminer les variations de *g*.

7. Construire la courbe représentative de *g* dans le plan muni d'un repère orthonormal.

B. Un extrait des programmes de BTS

Équations différentielles
On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de physique, mécanique et technologie, en faisant saisir l'importance de l'étude de phénomènes continus définis par une loi d'évolution et une condition initiale, et en faisant ressortir la signification ou l'importance de certains paramètres ou phénomènes : stabilité, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance,...

a) Résolution des équations linéaires du premier ordre $a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.
On se placera dans le cas où a, b, c sont des fonctions dérivables à valeurs réelles et on cherchera les solutions sur un intervalle où a ne s'annule pas.

b) Résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants, dont le second membre est une fonction exponentielle-polynôme $t\mapsto \exp(a\,t).P(t)$

Travaux pratiques
1. Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre.
2. Résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.
Pour les TP 1 et 2, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. [...]

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez dans quelle mesure cet exercice correspond au référentiel du BTS.

2. Proposez une correction des questions 2, 3 et 4 telle que vous la proposeriez à des élèves de BTS.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « **équations différentielles** », dont l'un au moins au niveau BTS.

2. Eléments de correction

L'exercice propose la résolution d'une équation différentielle du premier ordre : recherche de l'ensemble des solutions, puis de la solution satisfaisant une condition initiale donnée. La fonction obtenue est ensuite étudiée sur **R** suivant un plan d'étude classique.
Il semble que cet exercice soit tiré d'un manuel datant d'avant la réforme des programmes de BTS.

2. Résolution des questions 2, 3 et 4.

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est l'ensemble des fonctions de la forme : $f(x)=A\mathbf{e}^{-x}$ où A est une constante réelle.

Question 2.

- Son objectif est de déterminer une solution particulière de (E).
- Le changement de fonction devrait aboutir à une équation différentielle que l'on sait intégrer.
- Si u est une fonction définie et dérivable sur **R**, il en est de même de la fonction h définie sur **R** par : $h(x)=u(x)\mathrm{e}^{-x}$ et : $h'(x)=(u'(x)-u(x))\mathbf{e}^{-x}$.
- La fonction h est solution de (E) si et seulement si u est une primitive de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{x}-1$
- L'ensemble des primitives de $x\mapsto \mathrm{e}^{x}-1$ est l'ensemble des fonctions de la forme $x\mapsto u(x)=\mathrm{e}^{x}-x+C$ où C est une constante réelle. La fonction : $x\mapsto u_0(x)=\mathrm{e}^{x}-x$ est une telle fonction.
- La fonction : $h(x)=(\mathrm{e}^{x}-x)\mathrm{e}^{-x}=1-x\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E)

Question 3.

Le point clef est :

- y est une solution de (E) si et seulement si la fonction $y-h$ est une solution de (E_1), c'est-à-dire si et seulement si y est une fonction de la forme : $y(x)=\left(1-x\,\mathrm{e}^{-x}\right)+A\,\mathrm{e}^{-x}$ où A est une constante réelle.

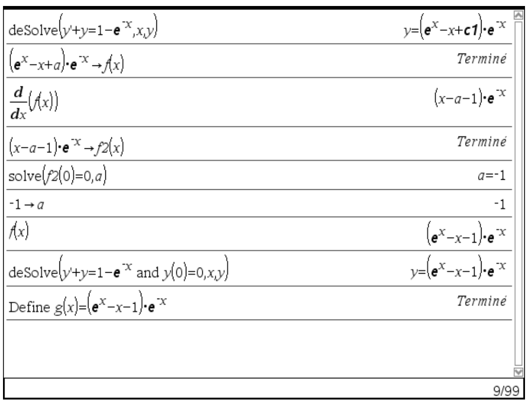
On peut faire remarquer que le résultat ne dépend pas de la primitive u de $x\mapsto \mathrm{e}^{x}-1$ choisie à la question 2. Si on en choisit une autre : $x\mapsto u(x)=\mathrm{e}^{x}-x+C$ on obtient la même famille de fonctions solutions : $h(x)=(\mathrm{e}^{x}-x+C)\mathrm{e}^{-x}=1-x\,\mathrm{e}^{-x}+C\,\mathrm{e}^{-x}$ puis : $y(x)=\left(1-x\,\mathrm{e}^{-x}+C\,\mathrm{e}^{-x}\right)+A\,\mathrm{e}^{-x}=\left(1-x\,\mathrm{e}^{-x}\right)+(A+C)\mathrm{e}^{-x}$.

Question 4.

$y'(x)=\left(1-x\,\mathrm{e}^{-x}\right)+A\,\mathrm{e}^{-x}$

Il existe une et une seule valeur de A pour laquelle $y'(0)=0$, c'est $A=-1$. La fonction g est la fonction définie sur **R** par : $g(x)=\left(1-x\,\mathrm{e}^{-x}\right)-\mathrm{e}^{-x}$

Compte tenu de l'équation différentielle (E) : $y'(0)+y(0)=1-\mathrm{e}^{0}=0$, en conséquence la condition initiale : $y'(0)=0$ équivaut à la condition initiale $y(0)=0$. Le logiciel *n*SpireCAS est en mesure de donner le résultat de deux façons différentes.



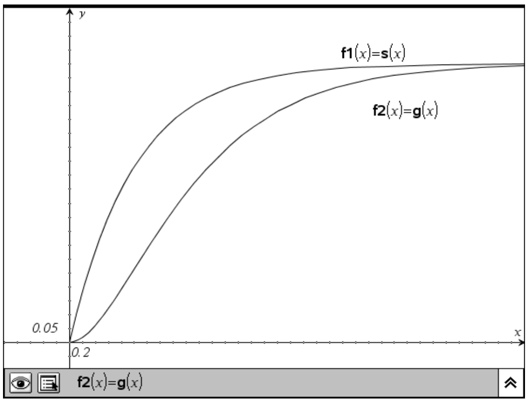
1. Adéquation au référentiel BTS
Il s'agit bien d'une équation linéaire du premier ordre conforme au programme et toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Toutes les directives purement mathématiques du référentiel sont donc respectées.

En revanche, le cadre général dans lequel doit se situer selon le programme l'étude d'une équation différentielle : « *On s'attachera à relier les exemples étudiés avec les enseignements de physique, mécanique et technologie…* » n'est pas respecté. L'exercice est décontextualisé et est prétexte à étudier une fonction contenant une exponentielle sans aucune attache avec un enseignement transversal.

Il reste à établir ce lien, dans la mesure du possible :
En électricité par exemple, l'étude de la tension dans un circuit RC série ou celle de l'intensité dans un circuit RL série en régime forcé amènent à une équation différentielle du type de la forme $y'+k\,y=s(t)$

Au lieu d'imposer la condition initiale $g'(0)=0$ difficile à contextualiser, il serait plus pertinent d'imposer : $g(0)_{gj2013}=0$ qui est ici une condition équivalente (en zéro : $g'(0)+g(0)=0$ compte tenu de l'équation (E) dont g est une solution).
Il conviendrait de résoudre l'équation différentielle et d'étudier la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ plutôt que sur **R** en entier.

Il est intéressant de représenter sur $[0\,;+\infty[$ à la fois le signal $t\mapsto s(t)$ et la fonction g, ce qui permet une interprétation : la réponse au signal est sujette à un effet retard (régime transitoire), mais l'état du circuit évolue vers la stabilité.
Ci-contre sont représentées la fonction signal s et la réponse du circuit g.



3. Voir REDCM pages 173 à 177. Vu que le jury propose l'étude d'une équation différentielle du premier ordre, pour répondre aux directives du dossier il semble incontournable de considérer au niveau BTS une équation différentielle du second ordre contextualisée (un circuit RCL par exemple).