ESD 2012 – 07 : Utilisation d'un tableur

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Voici un problème proposé par Leonhardt Euler dans son ouvrage « Introduction à l'analyse infinitésimale » (1748, traduction de J-B.Labey,1796).

Un particulier doit 400 000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent ; il acquitte tous les ans 25 000 florins ; on demande après combien d'années la dette sera entièrement éteinte.

B. Les comptes rendus de trois élèves de lycée

Élève 1
Les intérêts représentent chaque année 20000 florins. Sur les 25000 florins acquittés chaque année, 5000 florins servent au remboursement. 400 000÷5 000 = 80, la dette sera éteinte au bout de 80 ans.
Vous m'avez demandé si j'étais bien sûr, mais je pense que c'était un piège, je pense que j'ai la bonne réponse.

Élève 2
J'ai utilisé le tableur. En B2, j'ai rentré = 400000 . En C2, j'ai rentré = 25000.
En D2, = 0,05*B2 , en E2, = C2 - D2 et en B3, = B2 - E2 .
Après j'ai utilisé la poignée de recopie.
Je m'aperçois qu'au début de la 34$^{\text{ème}}$ année, la somme restant à payer est négative. Le particulier remboursera donc pendant 33 ans, et il aura un petit bonus la dernière année.

Élève 3
En cherchant avec le tableur, j'ai vu que la somme payée par le particulier qui n'est pas mangée par les intérêts forme une suite géométrique de raison 1,05 ! ! ! J'ai vérifié en faisant le quotient pour les dix premiers termes et en demandant 12 chiffres d'affichage (avec plus, cela aurait marché aussi).

J'ai ensuite utilisé la formule du cours, et ça m'a amené à : $5000\times\dfrac{1{,}05^n-1}{1{,}05-1}=400000$ et je suis resté bloqué là, même si vous m'avez dit de réfléchir, je n'ai pas trouvé.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions d'élèves au regard des programmes officiels, en mettant notamment en évidence leur capacité à chercher, expérimenter, modéliser, raisonner et démontrer.

2. Proposez une démonstration aboutie telle que vous la présenteriez devant une classe, dont vous préciserez le niveau.

3. Proposez deux ou trois problèmes où l'utilisation d'un tableur est pertinente.

2. Eléments de correction

Le but de l'exercice est de déterminer la durée d'amortissement d'un emprunt, remboursé par versement d'annuités constantes. Son origine « historique » permet de décontextualiser cette situation, quitte par la suite à s'intéresser à des emprunts plus contemporains.

L'exercice peut être traité à l'aide de l'outil des suites géométriques (solution « aboutie ») mais aussi, comme cela semble être le cas pour les productions d'élèves, à l'aide d'un tableur.

On notera la neutralité rigoureuse de l'enseignant qui se contente de remarques évasives « es-tu sûr », « réfléchis » (les élèves sont en phase de recherche à ce moment, ce qui justifie cette attitude). Tout porte à croire que le jury va cependant demander au candidat quelles indications pourraient s'avérer opportunes.

1. Analyse des productions

Elève 1 : Sa modélisation est incorrecte. Selon son modèle, les intérêts sont toujours calculés sur le capital initial sans tenir compte du fait que chaque annuité contient une part d'amortissement du capital.

Son raisonnement et sa démonstration sont compatibles avec son modèle. Cet élève ne ressent aucun besoin d'expérimentation, la simplicité de son modèle l'en dispense. Du point de vue « recherche », cet élève ne remet pas en cause la validité de sa solution, il est convaincu de la solidité de son raisonnement.

L'enseignant pourrait attirer l'attention sur la durée peu plausible du prêt (ce sont les héritiers qui vont rembourser …) et demander de calculer le total des sommes payées en 80 ans (cinq fois la somme empruntée…) pour tenter de remettre en cause la « foi du charbonnier » de cet élève.

Elève 2 : Utilisation pertinente du tableur qui, en prenant en charge les calculs et en renvoyant un « tableau d'amortissement » de l'emprunt, fournit une solution recevable. Cet élève a explicité une colonne « capital restant dû » et a tiré la poignée de recopie jusqu'à y voir afficher un résultat négatif.

Cet élève a donc su modéliser (explication correcte de son utilisation du tableur) expérimenter et tirer un constat de son expérimentation (référence implicite à la ligne 35 pour justifier l'arrêt des remboursements).

Il n'y a dans cette démarche aucune nécessité de « démontrer », mais seulement la nécessité d'expliquer clairement les résultats fournis par le tableur. Notons à ce propos une certaine ambiguïté dans la production de cet élève : y a-t-il 32 ou 33 remboursements de 25000 florins et un 33$^{\text{ème}}$ ou bien un 34$^{\text{ème}}$ en peu moins élevé ?

Elève 3 : Cet élève a utilisé son tableur pour conjecturer et pour faire apparaître des invariants, donc avec un autre objectif que celui de l'élève 2.

Sa modélisation est correcte (probablement à peu près la même que celle de l'élève 2).

Son expérimentation est correcte également. Une dizaine de lignes, comme il le dit lui-même, lui suffisent pour repérer un invariant : la suite de « ce qui n'est pas mangé » paraît être géométrique.

Pour appuyer sa conjecture, cet élève fait preuve d'initiative en calculant le quotient de deux termes consécutifs de la suite « amortissement » (son « raisonnement » est donc correct à ce propos). En revanche, il procède non pas à une démonstration de sa conjecture mais à une vérification, d'ailleurs peu convaincante puisqu'il fait référence à un affichage décimal : selon lui, « si le tableur affiche 1,050000000000, il n'y a aucune raison de rencontrer ensuite une décimale non nulle ».

Le caractère géométrique de la suite « amortissement » est ensuite correctement exploité : la somme des amortissements successifs doit être « égale » au capital emprunté ce qui l'amène à considérer l'équation : $5000\times\frac{1,05^n-1}{1,05-1}=400000_{gj2013}$. Cet élève sait exprimer la somme des termes d'une suite géométrique. Peut être est-ce le fait de considérer une équation d'un type que cet élève n'était pas en mesure de résoudre et non une valeur de n telle que $5000\times\frac{1,05^n-1}{1,05-1}\geq 400000$ qui a contribué au blocage. L'enseignant pourrait intervenir en ce sens : « est-ce bien une équation que l'on est amené à considérer ? » ou bien plus précisément « est-il possible d'en déduire une condition que devra vérifier l'entier n ? »

Ci-dessous un exemple de tableau d'amortissement : les colonnes B à E sont celles de l'élève 2, les colonnes F à I sont celles que l'on obtient en mettant sur une *même ligne* les effets du paiement d'une annuité, et la colonne J représente les calculs que l'élève 3 a pu effectuer. Il apparaît que le capital est remboursé en 33 annuités, la dernière étant d'un montant inférieur à 25000 florins.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0					400000				
1	400000,00	25000,00	20000,00	5000,00	395000,00	25000,00	20000,00	5000,00	
2	395000,00	25000,00	19750,00	5250,00	389750,00	25000,00	19750,00	5250,00	1,05
3	389750,00	25000,00	19487,50	5512,50	384237,50	25000,00	19487,50	5512,50	1,05
4	384237,50	25000,00	19211,88	5788,13	378449,38	25000,00	19211,88	5788,13	1,05
5	378449,38	25000,00	18922,47	6077,53	372371,84	25000,00	18922,47	6077,53	1,05
6	372371,84	25000,00	18618,59	6381,41	365990,44	25000,00	18618,59	6381,41	1,05
7	365990,44	25000,00	18299,52	6700,48	359289,96	25000,00	18299,52	6700,48	1,05
8	359289,96	25000,00	17964,50	7035,50	352254,46	25000,00	17964,50	7035,50	1,05
9	352254,46	25000,00	17612,72	7387,28	344867,18	25000,00	17612,72	7387,28	1,05
10	344867,18	25000,00	17243,36	7756,64	337110,54	25000,00	17243,36	7756,64	1,05
11	337110,54	25000,00	16855,53	8144,47	328966,06	25000,00	16855,53	8144,47	1,05
12	328966,06	25000,00	16448,30	8551,70	320414,37	25000,00	16448,30	8551,70	1,05
13	320414,37	25000,00	16020,72	8979,28	311435,09	25000,00	16020,72	8979,28	1,05
14	311435,09	25000,00	15571,75	9428,25	302006,84	25000,00	15571,75	9428,25	
15	302006,84	25000,00	15100,34	9899,66	292107,18	25000,00	15100,34	9899,66	
16	292107,18	25000,00	14605,36	10394,64	281712,54	25000,00	14605,36	10394,64	
17	281712,54	25000,00	14085,63	10914,37	270798,17	25000,00	14085,63	10914,37	
18	270798,17	25000,00	13539,91	11460,09	259338,08	25000,00	13539,91	11460,09	
19	259338,08	25000,00	12966,90	12033,10	247304,98	25000,00	12966,90	12033,10	
20	247304,98	25000,00	12365,25	12634,75	234670,23	25000,00	12365,25	12634,75	
21	234670,23	25000,00	11733,51	13266,49	221403,74	25000,00	11733,51	13266,49	
22	221403,74	25000,00	11070,19	13929,81	207473,93	25000,00	11070,19	13929,81	
23	207473,93	25000,00	10373,70	14626,30	192847,62	25000,00	10373,70	14626,30	
24	192847,62	25000,00	9642,38	15357,62	177490,01	25000,00	9642,38	15357,62	
25	177490,01	25000,00	8874,50	16125,50	161364,51	25000,00	8874,50	16125,50	
26	161364,51	25000,00	8068,23	16931,77	144432,73	25000,00	8068,23	16931,77	
27	144432,73	25000,00	7221,64	17778,36	126654,37	25000,00	7221,64	17778,36	
28	126654,37	25000,00	6332,72	18667,28	107987,09	25000,00	6332,72	18667,28	
29	107987,09	25000,00	5399,35	19600,65	88386,44	25000,00	5399,35	19600,65	
30	88386,44	25000,00	4419,32	20580,68	67805,76	25000,00	4419,32	20580,68	
31	67805,76	25000,00	3390,29	21609,71	46196,05	25000,00	3390,29	21609,71	
32	46196,05	25000,00	2309,80	22690,20	23505,85	25000,00	2309,80	22690,20	
33	23505,85	25000,00	1175,29	23824,71	-318,85	25000,00	1175,29	23824,71	
34	-318,85	25000,00	-15,94	25015,94	-25334,80	25000,00	-15,94	25015,94	

2. Une correction « aboutie »

En application des suites géométriques, classe de première S ou ES.

Notons c_0 le capital initialement emprunté. Supposons que le prêt soit consenti le 1 janvier 1750 (année zéro) et supposons que le remboursement ait lieu chaque 1 janvier.

Le 1 janvier 1751 (année 1), l'emprunteur effectue un premier remboursement d'un montant de 25000 florins, représentant une part $i_1 = 0{,}05 \times c_0 = 20000$ d'intérêts et une part $a_1 = 25000 - i_1 = 5000$ d'amortissement du capital. Le capital restant dû après la transaction est : $c_1 = c_0 - a_1 = 395000$.

En général, lors de la transaction numéro *n*, notons respectivement i_n, a_n, c_n la part d'intérêts payés, l'amortissement du capital (la somme « qui n'est pas mangée par les intérêts ») et le capital restant dû après la transaction.

On dispose des relations de récurrence : $i_n = 0{,}05\,c_{n-1}$; $a_n \underset{gilbertjulia2013}{=} 25000 - i_n$ et $c_n = c_{n-1} - a_n$ pour tout entier *n* strictement positif.

Soit, en privilégiant par exemple les suites « capital » et « amortissement » : $\begin{cases} 25000 - a_n = 0{,}05\,c_{n-1} \\ c_n = c_{n-1} - a_n \end{cases}$

On peut en déduire les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_n = 25000 - 0{,}05\,c_{n-1} = 25000 - 0{,}05(c_n + a_n) = 25000 - (25000 - a_{n+1}) - 0{,}05\,a_n \\ c_n = c_{n-1} + (0{,}05\,c_{n-1} - 25000) = 1{,}05\,c_{n-1} - 25000 \end{cases}$$

suivant que l'on privilégie une relation entre deux termes consécutifs de la suite « amortissement » ou « capital ».

On remarquera le décalage d'une unité entre les deux relations de récurrence : pour la suite « amortissement », on obtient une relation entre les termes de rangs *n* et $n+1$, et le premier terme de cette suite est le terme d'indice 1, alors que pour la suite « capital », on obtient une relation entre les termes de rangs *n* et $n-1$, et le premier terme de cette suite est le terme d'indice 0.

Dans le premier cas, on aboutit à la relation : $a_{n+1} = 1{,}05\,a_n$. Comme l'a conjecturé l'élève 3, la suite « amortissement » est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $a_1 = 5000$.

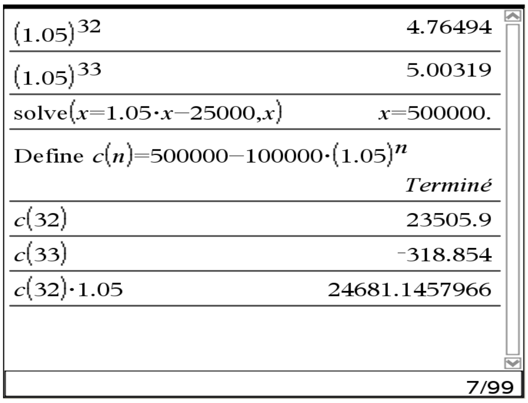
On cherchera pour quel indice *n* est-ce que la somme : $a_1 + a_2 + ... + a_n = 5000 \underset{gj2013}{} \times \dfrac{1{,}05^n - 1}{0{,}05} = 100000(1{,}05^n - 1)$ dépasse 400000., c'est-à-dire quel est le premier indice *n* tel que : $1{,}05^n \geq 5$

Dans le deuxième cas, la relation $c_n = 1{,}05\,c_{n-1} - 25000$ indique que la suite « capital restant dû » est une suite arithmético-géométrique. Sans détailler outre mesure :

- On considère le réel *x* tel que : $x = 1{,}05\,x - 25000$ (on trouve 500000)
- On vérifie que la suite de terme général $c_n - x$ est géométrique (de raison 1,05).
- On exprime c_n en fonction de *n* (on obtient la formule : $c_n = 500000 - 100000 \times 1{,}05^n$).
- On cherche l'indice du dernier terme positif.

L'écran ci-contre montre que l'emprunt est entièrement remboursé lors de la 33[ème] échéance. Cette dernière échéance se monterait à 24681,15 florins et non à 25000 florins (le capital restant dû est entièrement remboursé, avec les intérêts qu'il a produits).

Si le capital a été emprunté le 1 janvier 1750, il est remboursé complètement le 1 janvier 1783.



3. Commentaire

Le jury attend à juste titre des candidats une solution « aboutie », c'est donc bien qu'aucune des productions d'élèves ne s'en approche. En particulier, les productions des élèves 2 et 3 amènent à réfléchir sur les possibilités et les limites de l'utilisation d'un tableur (et plus généralement d'un outil informatique).

- L'élève 2 fournit une réponse recevable, mais uniquement basée sur l'observation (il « s'aperçoit »). Son activité mathématique se réduit à une utilisation, certes très opportune, des fonctions du tableur mais elle s'arrête là.
- L'élève 3 pousse sa réflexion un peu plus loin en cherchant des relations entre les cellules de deux colonnes voisines de son tableur. Des deux élèves, c'est bien lui qui a eu l'activité mathématique la plus pertinente puisqu'il a su analyser et identifier la nature une des suites de nombres présentes dans les colonnes de son tableur puis en tirer quelques conséquences. Mais lui aussi « a vu » et « a vérifié », il n'a pas démontré.

Dans les deux cas, le tableur a été utilisé à un moment ou à un autre comme un outil de preuve et, de ce fait, si l'on excepte l'initiative louable de l'élève 3, a inhibé la capacité de raisonnement au lieu de la nourrir. D'un point de vue pédagogique, il n'a donc pas été utilisé à bon escient.

Les candidats au CAPES et futurs enseignants doivent réfléchir à cette utilisation et distinguer le moment de la conjecture et l'incontournable moment de la preuve. Un trop grand laxisme à ce niveau donne clairement raison aux détracteurs de l'utilisation en classe des outils logiciels.