ESD 2012 – 05 : Arithmétique

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$ où x et y sont des entiers relatifs.

1.1. Vérifier que le couple $(9;6)$ est solution de l'équation (E).

1.2. Résoudre l'équation (E)

2. Le 1 juin 2012, les participants d'un club d'astronomie ont observé le corps céleste A qui apparaît tous les 51 jours. Le 28 juin 2012, ils ont observé le corps céleste B qui apparaît tous les 72 jours.
2.1. À quelle date devront-ils fixer une nouvelle réunion pour observer simultanément les 2 corps ?
2.2. Un membre du club, qui ne pourra pas être présent à cette date, aura-t-il la possibilité d'observer lune nouvelle conjonction avant fin 2016 ?

B. Solution proposée par un élève aux questions 1.2 et 2.1.

1.2. D'après 1.1 on a : $17x - 24y = 17 \times 9 - 24 \times 6$ soit $17(x-9) = 24(y-6)$.
Ainsi, 17 divise $24(y-6)$, or 17 et 24 sont premiers, donc 17 divise $y-6$, avec Gauss.
D'où l'existence d'un entier k tel que $y - 6 = 17k$
On trouve de même l'existence d'un entier k tel que $x - 9 = 24k$
Donc les solutions de (E) sont les couples de la forme $(9+24k\ ;\ 6+17k)$ où k est un entier.

2.1. Le corps céleste B est observé 27 jours plus tard, d'où $t = 51x = 72y + 27$ et $17x - 24y = 9$
De plus, d'après 1.1. on a $x = 9$ et $y = 6$. Comme le PPCM de 6 et de 9 vaut 18, on pourra observer simultanément les 2 corps le 16 juillet 2012.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez le raisonnement de l'élève dans chacune de ses réponses.

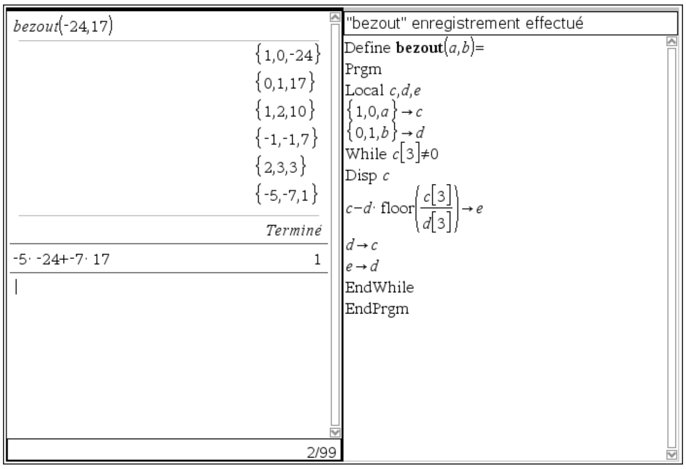
2. Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Proposez deux ou trois exercices sur le thème ***arithmétique*** dont l'un au moins fait appel à la mise en œuvre d'un algorithme.

2. Eléments de correction

L'exercice propose la résolution d'une équation diophantienne de la forme $a\,x+b\,y=c$, avec second membre, une solution particulière étant connue. Cette résolution est suivie d'une contextualisation, situation pseudo-concrète se ramenant à la résolution d'un système de deux congruences.
Il est conforme au programme d'une classe de terminale scientifique spécialité mathématique.

L'énoncé livre un couple solution de l'équation. Il convient cependant de savoir comment obtenir une telle solution particulière. Par exemple, le programme **bezout** donne une solution particulière de l'équation $ax+by=1$ lorsque le coefficient b est positif (c'est pourquoi les entiers – 24 et 17 ont été intervertis sur l'écran ci-contre).
Ici, on obtient le couple $(-7\,;\,-5)$ en respectant l'ordre des données.
On note que le couple solution particulière de l'équation avec un second membre égal à 9 fourni par cette méthode serait le couple $(-63\,;\,-45)$



1. Analyse de la production d'élève

	Réussites	*Echecs*
Question 1.2	Utilisation correcte de la solution particulière : cet élève se ramène à la résolution d'une équation du type $a\,x=b\,y$. Référence pertinente au théorème de Gauss. Expression correcte de l'ensemble des couples solutions.	Confusion entre les notions de « nombres premiers » et de « nombres premiers entre eux ». Dissocie à tort l'expression de $(x-9)$ de celle de $(y-6)$ (« on trouve de même … » n'est pas recevable).
	S'il est vrai que cet élève obtient la bonne réponse, sa démarche est néanmoins incorrecte. Sa bonne réponse provient de deux erreurs qui se sont neutralisées. Dans la logique de sa démarche, il aurait dû dire « on trouve de même un entier *k'* tel que $x-9=24k'$ » (pas forcément le même que *k* par conséquent). C'est uniquement parce qu'il utilise la même notation pour désigner ces deux entiers que cette incorrection n'est pas apparente. Il aurait dû réinjecter dans l'équation la relation $y-6=17k$ pour obtenir : $17(x-9)=24\times17\,k$ et mettre en évidence la dépendance entre « $y-6$ multiple de 17 » et « $x-9$ multiple de 24 ».	
Question 2.1	Mise en équation correcte des temps d'attente des conjonctions.	Cet élève a une mauvaise compréhension de la question. Il ne voit pas que cette question porte sur les valeurs possibles de *t* (et non sur celles de *x* et de *y*). Il n'a pas su réinvestir les résultats de la question 1.
	Cet élève choisit de donner une solution désespérée en changeant à la fois et le sens de la question et le sens des données de l'énoncé. Il répond au problème suivant : « si un phénomène se produit tous les 6 jours et un autre tous les 9 jours, et s'ils se sont produits en même temps au jour 27, quand se produiront-ils ensemble une nouvelle fois ? »	

2. Une correction de la question 2.

On peut s'appuyer sur le travail de l'élève, en faisant expliciter les paramètres que cet élève utilise dans son équation $t = 51x = 72y + 27$.

- t représente le nombre de jours écoulés entre le 1 juin 2012 (par conséquent cette date est celle du « jour zéro ») et la date considérée.
- x représente un nombre de révolutions complètes effectuées par le corps céleste A depuis son apparition du 1 juin.
- y représente un nombre de révolutions complètes effectuées par le corps céleste B depuis son apparition du 28 juin.
- L'équation $t \underset{gj2013}{=} 51x = 72y + 27$ représente le fait qu'il y a conjonction à la date du « 1 juin + t » (t jours après le 1 juin 2012) si et seulement à cette date chaque corps a effectué exactement un nombre entier de révolutions depuis son apparition du mois de juin.

Peut-être le seul fait de définir correctement chaque paramètre permettrait à l'élève de remettre en cause sa solution et d'ouvrir pour lui une nouvelle piste : « Dans la question 2, c'est bien t que l'on cherche, il faut trouver un moyen de l'exprimer en utilisant les conclusions de la question 1 ».

D'après la question 1, $51x = 72y + 27$ si et seulement si il existe un entier relatif k tel que $(x\ ;\ y) = (9 + 24k\ ;\ 6 + 17k)$. Les valeurs de t amenant à une conjonction sont donc : $t \underset{gj2013}{=} 51 \times (9 + 24k) = 459 + 1224k$ où k est un entier relatif. Les dates « 1 juin 2012 + $459 + 1224k$ » représentent les dates de conjonction antérieures au 1 juin lorsque k est négatif, et les dates postérieures lorsque k est positif.

On peut faire remarquer que l'on a aussi $t = 72(6 + 17k) + 27 = 459 + 1224k$.

Il est utile désormais de se munir d'un calendrier indiquant le numéro du jour courant et le nombre de jours avant le dernier jour de l'année.

Le $459^{\text{ème}}$ jour après le 1 juin 2012 est le $246^{\text{ème}}$ de l'année 2013, c'est-à-dire le 3 septembre 2013. La conjonction suivante aura lieu 1683 jours après le 1 juin 2012. Or, 1683 jours représentent 4 années non bissextiles et 253 jours. La nouvelle conjonction aura lieu 252 jours après le 1 juin 2016 puisque 2016 est bissextile, c'est-à-dire le $39^{\text{ème}}$ jour de l'année 2017 (6 février 2017).

3. Voir REDCM pages 113 à 117.

3. Pour aller plus loin

1. Un contrôle des résultats.

Une étude sur tableur permettrait, devant une classe de terminale S, un tel contrôle *a posteriori*. La colonne **cca** indique les jours où le corps céleste A est visible. La colonne **ccb** indique les jours où le corps céleste B est visible. En passant la colonne **ccb** à la moulinette d'une congruence modulo 51, on peut repérer les cas où l'apparition de B se produit un jour où A apparaît lui aussi. La première occurrence d'un zéro dans la dernière colonne se produit lorsque le corps B a effectué 6 révolutions, et A 9 révolutions.

	A	B u	C v	D cca	E ccb	F	G	H
◆	=seq(n,n,(	=seq(17*n	=seq(9+24	=3*'u	=3*'v	=mod(ccb		
1	0	0	9	0	27	27		
2	1	17	33	51	99	48		
3	2	34	57	102	171	18		
4	3	51	81	153	243	39		
5	4	68	105	204	315	9		
6	5	85	129	255	387	30		
7	6	102	153	306	459	0		
8	7	119	177	357	531	21		
9	8	136	201	408	603	42		
10	9	153	225	459	675	12		
11	10	170	249	510	747	33		
12	11	187	273	561	819	3		
13	12	204	297	612	891	24		
14	13	221	321	663	963	45		
F	=mod(ccb,51)							

On cherche ensuite la deuxième occurrence d'un zéro, qui se produit lorsque le corps *B* a effectué 23 révolutions, et *A* 33 révolutions.

Malheureusement, la mise au point d'un tel travail demande du temps, il n'est pas certain que le rapport qualité / prix soit très favorable un jour d'oral de CAPES.

	A	B u	C v	D cca	E ccb	F	G	H
◆	=seq(n,n,(	=seq(17*n	=seq(9+24	=3*'u	=3*'v	=mod(ccb,		
21	20	340	489	1020	1467	39		
22	21	357	513	1071	1539	9		
23	22	374	537	1122	1611	30		
24	23	391	561	1173	1683	0		
25	24	408	585	1224	1755	21		
26	25	425	609	1275	1827	42		
27	26	442	633	1326	1899	12		
28	27	459	657	1377	1971	33		
29	28	476	681	1428	2043	3		
30	29	493	705	1479	2115	24		
31	30	510	729	1530	2187	45		
32	31	527	753	1581	2259	15		
33	32	544	777	1632	2331	36		
34	33	561	801	1683	2403	6		

H24

2. Résolution générale d'un système de deux congruences.

Le problème posé dans la question 2 peut s'exprimer en termes de congruences. Il s'agit de résoudre le système : $\begin{cases} s \equiv 0 \ (17) \\ s \equiv 9 \ (24) \end{cases}$ en posant $s = \dfrac{t}{3}$. Je n'ai pas utilisé cette traduction, car elle ne me paraît pas décisive dans ce contexte.
Cependant, le candidat peut avoir une autre opinion, et il n'est pas exclu qu'un jury de CAPES demande une telle traduction de l'énoncé.

Il s'agit là d'un exemple de système de deux congruences du type : $\begin{cases} s \equiv r_1 \ (m_1) \\ s \equiv r_2 \ (m_2) \end{cases}$ où m_1 et m_2 sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Ces deux entiers étant premiers entre eux, il existe deux entiers relatifs u_1 et u_2 vérifiant l'égalité de Bézout : $u_1\, m_1 + u_2\, m_2 = 1$.
Dans ce cas, le nombre $s_p = r_2\, u_1\, m_1 + r_1\, u_2\, m_2$ est une solution particulière du système des deux congruences (on le vérifie aisément).

D'autre part, *s* est une solution du système si et seulement si : $\begin{cases} s \equiv s_p \ (m_1) \\ s \equiv s_p \ (m_2) \end{cases}$, c'est à dire si et seulement si $(s - s_p)$ est un multiple commun de m_1 et de m_2. Puisque m_1 et m_2 sont premiers entre eux, ceci est équivalent au fait que $(s - s_p)$ est un multiple du produit $m_1\, m_2$.
Ainsi, *s* est une solution si et seulement si $s \equiv r_2\, u_1\, m_1 + r_1\, u_2\, m_2 \ (m_1 \times m_2)$

Dans le cas présent, on obtiendrait avec cette méthode : $(u_1 \ ; u_2) = (-7 \ ; -5)$ (voir préambule) puis : $s_p = 9 \times (-7) \times 17 = -1071$ et $s \equiv -1071 \ (408)$
La première solution positive est $-1071 + 3 \times 148 = 153$ et la deuxième est $-1071 + 4 \times 148 = 561$.
Nous retrouvons les résultats précédents.