ESD 2012 – 04 : Géométrie analytique

1. Le sujet

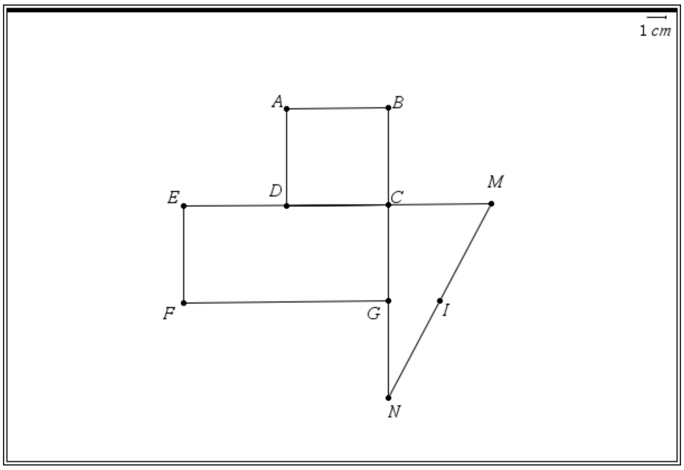
A. L'exercice proposé au candidat

Dans la figure ci-contre :

- *ABCD* est un carré
- *ECGF* est un rectangle
- Les points *B*, *C*, *G*, *N* sont alignés
- Les points *E*, *D*, *C*, *M* sont alignés
- $DC = DE = EF = CM = GN$
- *I* est le milieu du segment [*MN*].

Les droites (*AM*) et (*EI*) sont-elles parallèles ?

On pourra se placer dans le repère (*D*, *C*, *A*)



B. Les réponses proposées par quatre élèves

Élève 1
Les droites ne se croisent pas sur le dessin sauf si on les prolonge. Donc, oui elles sont parallèles.

Elève 2
On a $\overrightarrow{AM}\,(2\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{EI}\,(2{,}5\,;\,-1)$. Les vecteurs ne sont pas égaux donc les droites ne sont pas parallèles.

Elève 3
$AM = \sqrt{5}$ et $IE = \sqrt{(-1-1{,}5)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{7{,}25}$. Les longueurs sont différentes, donc les droites ne sont pas parallèles.

Elève 4
Pour (*AM*), on avance de deux et on descend de 1, alors que pour (*EI*), quand on avance de deux, on descend de moins de 1, donc les droites ne sont pas parallèles.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez les productions des élèves en précisant les connaissances et savoir-faire mis en œuvre dans le domaine de la géométrie analytique.

2. Proposez une correction de cet exercice telle que vous la présenteriez devant la classe, en tenant compte des différentes réponses obtenues.

3. Proposez deux ou trois exercices de géométrie analytique.

2. Eléments de correction

Cet exercice propose à la sagacité d'élèves de niveau seconde un problème d'incidence.

En imposant que *ABCD* soit un carré, l'auteur de l'énoncé privilégie délibérément le recours à la géométrie analytique, en suggérant l'emploi d'un repère orthonormal, plus familier aux élèves. C'est un choix que l'on peut discuter.

1. Analyse des travaux d'élèves

Aucun des élèves n'a fourni de solution entièrement satisfaisante. Les élèves 2 et 4 sont cependant proches de fournir une solution correcte, l'élève 2 à une confusion près (il aurait du reconnaître que les deux vecteurs qu'il mentionne sont *non colinéaires*) et l'élève 4 à une traduction mathématique près (des termes « avancer » et « descendre »). Par ordre de réussite croissant :

	Réussites	Echecs
Elève 1	Aucune. Cet élève n'a effectué aucun traitement mathématique de la situation	Cet élève n'a qu'une conception perceptive de la notion de parallélisme : « deux droites parallèles peuvent se croiser … mais loin » (à l'image de rails de chemins de fer qui paraissent se rapprocher à l'horizon).
Elève 3	Sait utiliser un repère pour calculer la distance entre deux points du plan.	Cet élève fait peut être référence à la caractérisation du parallélisme en termes de distance : deux droites sont parallèles si et seulement si tous les points de l'une sont à la même distance de l'autre, mais sa conception est incorrecte puisqu'il calcule des distances entre deux points d'une même droite. Si cependant cette hypothèse est exacte, on se serait davantage attendu au calcul des distances *AE* et *MI*.
Elève 4	Utilise implicitement un quadrillage et des déplacements sur quadrillage. Connaît la propriété de proportionnalité des écarts sur une droite affine.	Selon sa conception, deux droites sont parallèles si, quand on « avance » sur chacune d'une même quantité, on « descend » (ou on « monte » …) sur chacune d'une même quantité. Cette conception est artisanale et il reste à lui donner un sens mathématique.
Elève 2	Sait utiliser un repère et faire le lien entre géométrie analytique et outil vectoriel. Connaît la notion de vecteur directeur d'une droite. Sait calculer les coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de son origine et de son extrémité.	Confond égalité vectorielle et colinéarité vectorielle. L'implication simple : « si deux droites ont des vecteurs directeurs égaux alors elles sont parallèles » induit pour lui une condition suffisante incorrecte de non parallélisme : « si deux droites ont des vecteurs directeurs inégaux alors elles ne sont pas parallèles ».

2. Une correction de l'exercice.

La correction devra mettre en évidence l'intérêt de « se placer dans un repère », en l'occurrence ici le repère $\left(D_{gj2013}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$, pour résoudre une question de parallélisme :

1. Pour vérifier que deux droites sont parallèles on peut comparer leurs coefficients directeurs.
2. On peut faire le lien avec la notion de vecteur directeur : considérer un vecteur directeur de chacune des deux droites et vérifier leur colinéarité.

Dans le premier cas, on s'appuiera plutôt sur la production de l'élève 4 :

- Faire formuler ce que signifie « avancer » : on considère la différence des abscisses de deux points distincts, et ce que signifie « descendre » ou « monter » : on considère la différence des ordonnées des deux points en question (l'élève 4 considère $x_M - x_A$ et, en notant *J* le point d'intersection de (*EI*) avec (*CG*), il considère $x_J - x_E$ car : $x_J - x_E = x_M - x_A = 2$. Il compare ensuite $y_M - y_A$ avec gilbertjulia2013 $y_J - y_E$: puisque *J* est entre *C* et *G*, cette différence est strictement comprise entre – 1 et 0.
- Souligner l'intérêt de calculer de préférence les coefficients directeurs : il n'est pas nécessaire de considérer, sur chacune des droites, la même différence des abscisses. Pour calculer le coefficient directeur de (*EI*), il est plus facile d'utiliser les points *E* et *I*.
- Les coefficients directeurs des droites (*AM*) et (*EI*) sont respectivement $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ et $\dfrac{y_I - y_E}{x_I - x_E}$. Le calcul montre que ces droites ont des coefficients directeurs différents, elles ne sont donc pas parallèles.

Dans le deuxième cas, on s'appuiera plutôt sur la production de l'élève 2 :

- Faire exprimer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites. Il est naturel de choisir les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$.
- Faire rappeler la condition de colinéarité de deux vecteurs : deux vecteurs de coordonnées $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles ou encore si et seulement si $x\,y' - y\,x' = 0$.
- Reprendre la production de l'élève 2 : les deux vecteurs choisis *ont des ordonnées égales* c'est pourquoi, ayant des abscisses inégales, leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles : ces vecteurs *ne sont pas colinéaires* donc les droites qu'ils dirigent ne sont pas parallèles.

Dans les deux cas, on peut exploiter la production de l'élève 3 pour faire expliciter les coordonnées des points utiles. En particulier, pour obtenir les coordonnées du point *I*, on peut par exemple écrire que : $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NI}$. Puisque *G* et *I* sont les milieux respectifs des segments [*NC*] et [*NM*] : $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NI}$ gj2013 $= \frac{1}{2}\overrightarrow{CN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. On obtient ainsi :

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$. Le point *I* a pour coordonnées $I\left(\frac{3}{2}\ ;\ -1\right)$.

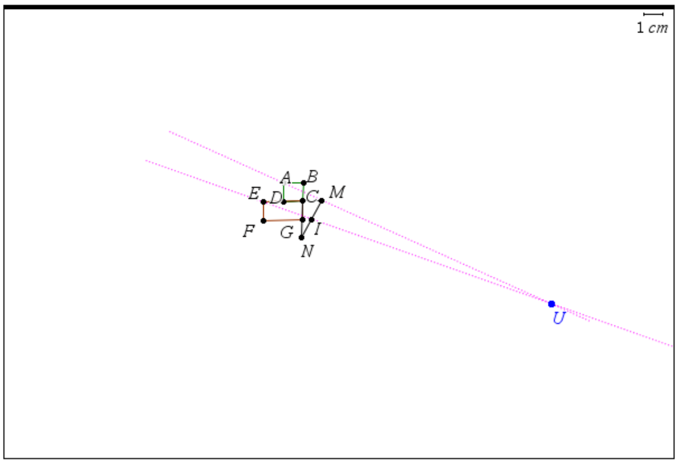
3. Exercices complémentaires

Voir REDCM pages 82 et 83.

3. Pour aller plus loin

3.1. La production de l'élève 1

Cet élève 1 a traversé toutes les classes du collège sans acquérir la notion de parallélisme, il y a peu de chance qu'il y parvienne par cet exercice. Il serait illusoire de vouloir lui faire apprendre que « deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur » si la notion de parallélisme n'est pas, à ses yeux, porteuse de sens mathématique. Il appartient à cet élève de prendre en charge lui-même une remise en cause de son concept de parallélisme. A l'enseignant de le convaincre de cette « nécessité ».



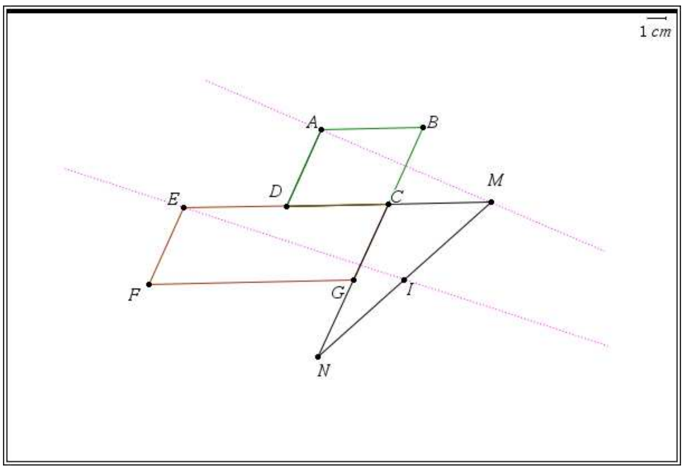
L'affichage de la figure dans une page de grande dimension permet de rendre apparent le point d'intersection de (*AM*) et de (*EI*).

Peut être (?) cette figure fera-t-elle réfléchir l'élève 1 : est-il possible que deux droites soient déclarées parallèles sur un dessin et sécantes sur un autre ?

En prolongement (pour tous les élèves), on peut chercher les coordonnées de ce point d'intersection dans le repère suggéré. Alors que pour établir le non parallélisme des deux droites il suffisait de comparer leurs coefficients directeurs, il faut maintenant une équation cartésienne de chaque droite pour déterminer leur point d'intersection.

3.2. Le rôle des hypothèses de l'énoncé : hypothèses superflues ?

La situation proposée est en fait plus générale que celle de l'énoncé original comme en témoigne la figure ci-contre, où *ABCD* et *EFGC* sont deux parallélogrammes tels que *C* est milieu de [*BG*] et *D* est milieu de [*EC*].



« *À l'occasion de certains travaux, on pourra utiliser des repères non orthonormés* » indiquent les commentaires du programme. Ce travail, justement, s'y prête très bien.

L'enseignant peut soumettre cette situation « affaiblie » à ses élèves, soit dès le début de l'étude, en modifiant l'énoncé, soit en fin d'exercice, lors de sa synthèse, en posant dans ce cas la question : « qu'est-ce qui change, peut-on toujours utiliser un repère ? ».

3.3. Une autre méthode de résolution

On peut établir sans avoir recours à la géométrie analytique que (*AM*) et (*EG*) sont des droites parallèles. Les droites (*EG*) et (*EI*) étant sécantes (en *E*), les droites (*AM*) et (*EI*) le sont aussi .