ESD 2012 – 02 : Problèmes avec prise d'initiative

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

Sur l'autoroute, une voiture se trouve juste derrière un camion au moment où elle décide de s'arrêter sur une aire de repos. Le conducteur prend une pause de 10 minutes puis repart et règle son régulateur de vitesse sur 110 km/h. Le camion, quant à lui, roule à une vitesse constante de 90 km/h tout au long de son trajet. Au bout de combien de temps (et de combien de kilomètres) la voiture rattrapera-t-elle le camion ?

B. La solution proposée par trois élèves

Élève 1

La vitesse de la voiture est de 110 km/h, celle du camion de 90 km/h. On en déduit une fonction $f(x)$ qui calcule la distance parcourue par la voiture et une fonction $g(x)$ qui calcule celle du camion. Soit $f(x)=\frac{110}{60}x$ et $g(x)=\frac{90}{60}x$ où x est le temps en minutes. Sachant que la voiture fait une pause de 10 minutes, le camion prend alors une avance de $g(10)=15\,\text{km}$. Or d'après le tableur :

min	$f(x)$	$g(x)$	Il y a exactement 15 km d'écart entre les deux véhicules au bout de 45 minutes. Il a donc fallu 45 minutes et 82,5 km à la voiture pour rattraper le camion.
45	82,5	67,5	

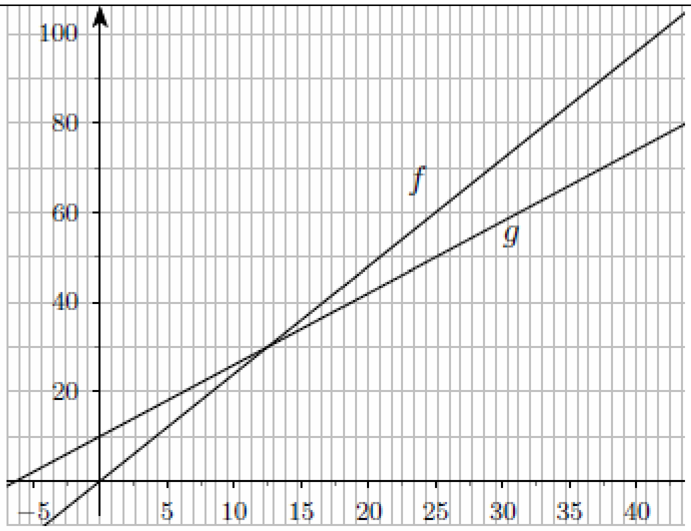
Élève 2

Quelle distance parcourt le camion en 10 minutes ? $\frac{10}{60}=0{,}16$; $d=v\times t=90\times 0{,}16=15$ km. Donc en 10 minutes, il parcourt 15 km.

En combien de temps la voiture va-t-elle parcourir les 15 km pour rattraper le camion ? $t=\frac{d}{v}=\frac{15}{110}=0{,}13$

On convertit les heures en minutes : 0,13 = 8,18 min. La voiture met 8, 18 minutes en 15 km pour rattraper le camion.

Élève 3



f représente l'évolution en km de la voiture dans le temps et *g* celle du camion. On remarque qu'au bout de 12,5 minutes la voiture rattrape le camion et que ça fait à peu près 30 km.

C. Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et en indiquant l'origine possible de ses éventuelles erreurs.

2. Corrigez cet exercice comme vous le feriez devant une classe de seconde.

3. Proposez deux ou trois ***problèmes avec prise d'initiative*** dont l'un au moins pourrait être proposé en collège

2. Eléments de correction

L'exercice propose une situation modélisable par des fonctions affines. Il se prête à une résolution par différentes méthodes variant les registres : algébrique, graphique, raisonnement proportionnel, utilisation de tableur…

1. Analyse des travaux d'élèves

L'élève 1 fournit une solution correcte, bien qu'on y relève une ambigüité. Les élèves 2 et 3 fournissent une solution incorrecte.

<table>
<tr><th></th><th>Compréhension</th><th>Réalisation</th><th>Communication</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 1</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>Oui, avec la réserve d'une ambigüité dans sa conclusion</td></tr>
<tr><td colspan="3">Réussites :
Il sait que lorsqu'un mouvement est uniforme, la distance parcourue est une fonction linéaire du temps de parcours.
Il applique ce savoir pour modéliser la situation proposée à l'aide de deux fonctions.
Il sait adapter sa stratégie aux circonstances (il tabule les deux fonctions, et parvient à interpréter correctement les données affichées par son tableur).
Il sait communiquer sa démarche et l'exposer avec clarté. Il finit son exposé par une conclusion résumant ses résultats.
Echec (ou plutôt « maladresse »)
Il commet l'erreur de désigner par la même lettre la variable « temps de parcours camion » et la variable « temps de parcours voiture » alors que ces temps de parcours ne sont pas calculés à partir du même instant. Cette erreur lui interdit de considérer algébriquement ou graphiquement à la fois la fonction f et la fonction g (ce dont il semble se rendre compte puisqu'il choisit l'outil tableur). Sur une même ligne du tableau de valeurs, il n'a pas non plus les distances parcourues par les véhicules au même instant (mais il surmonte cette difficulté).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 2</td><td>Non. A modifié la nature du problème (selon lui, la camion s'arrête pour attendre la voiture …)</td><td>Non. Traite un problème autre que le problème posé.</td><td>Oui, découpe sa démarche en trois étapes qu'il détaille. Quelques incorrections cependant (on ne dit pas t minutes en d kilomètres, on n'écrit pas $90\times 0{,}16=15_{gilbertjulia2013}$ alors que 0,16 est une troncature de $\frac{1}{6}$ ...)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Réussites :
Maîtrise la relation $d=v\times t$ caractéristique d'un mouvement uniforme pour calculer l'un quelconque des paramètres. Il effectue les calculs avec les valeurs exactes. (C'est seulement lorsqu'il reporte les résultats lus sur sa calculatrice sur sa copie qu'il retient les troncatures au centième et non les arrondis).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elève 3</td><td>Très hypothétique</td><td>Non. Solution graphique incohérente. Les fonctions censées représenter les « évolutions » sont incorrectes sinon fantaisistes. La fonction f est à peu près la fonction $f(t)=2{;}5t$ et la fonction g semble être la fonction : $g(t)=10+1{,}6t$. Il semble avoir pris les 10 minutes pour des kilomètres (?).</td><td>Non. N'explique pas pourquoi les « évolutions » sont représentées par ces droites-là.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Réussites : sait que dans le cas d'un mouvement uniforme, la représentation graphique d'une distance en fonction du temps est une droite.
Semble savoir interpréter un graphique (signification de l'intersection de deux courbes) et en effectuer une lecture. Mais cela demanderait confirmation …
Fait preuve de compétences approfondies en matière de bluff, à moins que son choix de fonctions ait une explication qui m'échappe.</td></tr>
</table>

Pour l'élève 1, l'origine possible de sa maladresse est le fait que, selon lui, un mouvement uniforme est nécessairement associé à une fonction linéaire.
Il faudrait attirer son attention sur la contradiction dans sa conclusion entre « il y a 15 km d'écart entre les deux véhicules » et « la voiture a rattrapé le camion » pour lui faire préciser ce que, au juste, représentent ses fonctions *f* et *g* et lui demander ce qu'il faudrait modifier pour obtenir les distances parcourues par les véhicules *au même instant*.

Pour l'élève 2, l'origine est une modélisation incorrecte de la situation : cet élève est en mesure de modéliser une situation par une équation du type $f(t)_{gj2013} = k$ mais non du type $f(t) = g(t)$). On pourrait lui faire tracer un axe gradué sur lequel on ferait repérer les positions des deux véhicules à l'instant zéro où la voiture repart puis 15 minutes après. Il devrait se rendre compte que le camion s'est déplacé et qu'à cet instant la voiture est encore derrière le camion.

Pour l'élève 3, je n'ai pas d'explication plausible. Peut-être cet élève ne sait pas mettre en équation le mouvement des véhicules, il connaît seulement l'allure des courbes représentatives (des droites) et a effectué le tracé au jugé (le camion va plus vite que la voiture donc la pente de la droite « camion » est moins forte que celle de la droite « voiture »)

2. Correction de l'exercice devant une classe de seconde :
A ce niveau de classe, on va privilégier une modélisation à l'aide de fonctions. Conformément au programme, on s'efforcera de « *pour un même problème, combiner résolution graphique et contrôle algébrique* ».

Modélisation

- Commencer par souligner une première hypothèse : un véhicule « roule à une vitesse constante » tandis que l'autre « règle son régulateur de vitesse » : le mouvement de chacun des véhicules est uniforme. On sait qu'un tel mouvement peut se modéliser par une fonction linéaire.
- Puis souligner une deuxième hypothèse : le conducteur de la voiture « prend une pause de 10 minutes » pendant que l'autre conducteur continue à rouler. Les deux véhicules ne partent pas au même instant de l'aire de repos. On est donc obligé de tenir compte de cet écart et de définir avec précision l'origine des temps.

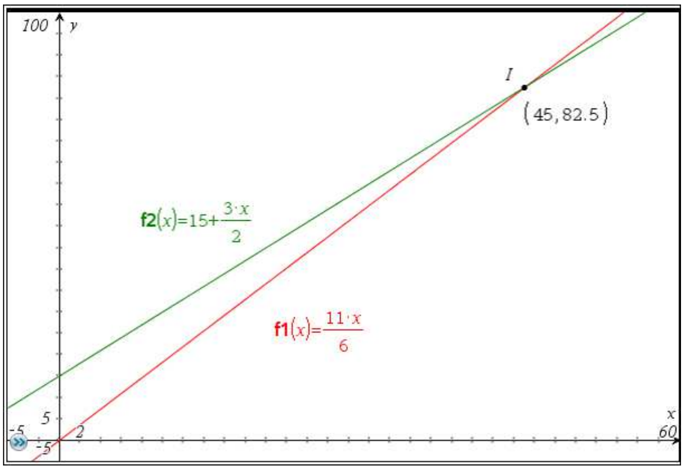
On définit comme instant zéro l'instant où la voiture repart de l'aire de repos. Les deux fonctions *f* et *g* qui calculent à l'instant $t \geq 0$ les distances parcourues respectivement par la voiture et par le camion depuis l'aire de repos sont : $f(t)_{gilbertjulia2013} = \frac{110}{60}t = \frac{11}{6}t$ et $g(t) = 15 + \frac{90}{60}t = 15 + \frac{3}{2}t$

Traitement mathématique
A partir de là, on peut envisager plusieurs méthodes de résolution :

Solution graphique :

Les représentations graphiques des distances parcourues par les deux véhicules sont des droites. Le coefficient directeur de chaque droite représente la vitesse de chaque véhicule (en $km.min^{-1}$).

L'abscisse du point d'intersection des deux droites donne l'instant où la voiture rattrape le camion, l'ordonnée de ce point donne la distance parcourue par les véhicules depuis l'aire de repos à cet instant.



Si les tracés sont effectués à la main, on pourra à cette occasion « *mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique* ». Les deux droites ont en effet des coefficients directeurs assez voisins, la position exacte de leur point d'intersection restera incertaine en première lecture.

Solution tableur (facultative) :

Une tabulation convenable des fonctions f et g permettrait de mettre en évidence que « en 15 minutes, la voiture rattrape 5 km sur le camion » et que à l'instant 45, camion et voiture ont parcouru des distances égales.

	A temps	B	C	D	E	F	G	H	I
◆	=seq(5*n,r	=f1(temps	=f2(temps						
1	0.	0.	15.						
2	5.	9.16667	22.5						
3	10.	18.3333	30.						
4	15.	27.5	37.5						
5	20.	36.6667	45.						
6	25.	45.8333	52.5						
7	30.	55.	60.						
8	35.	64.1667	67.5						
9	40.	73.3333	75.						
10	45.	82.5	82.5						
11	50.	91.6667	90.						
12	55.	100.833	97.5						
13	60.	110.	105.						
14	65.	119.167	112.5						
15	70.	128.333	120.						
10									

Solution algébrique :
On est conduit à résoudre l'équation $f(t)=g(t)$ qui a pour solution $t=45$. Pour cette valeur de t, $f(45)=g(45)=82{,}5$

Conclusion
Pour rattraper le camion, la voiture met 45 minutes à partir de l'instant où elle repart de l'aire de repos. Elle doit parcourir 82,5 km pour cela.
On peut comparer les performances des approches graphique, (tableur) et algébrique.

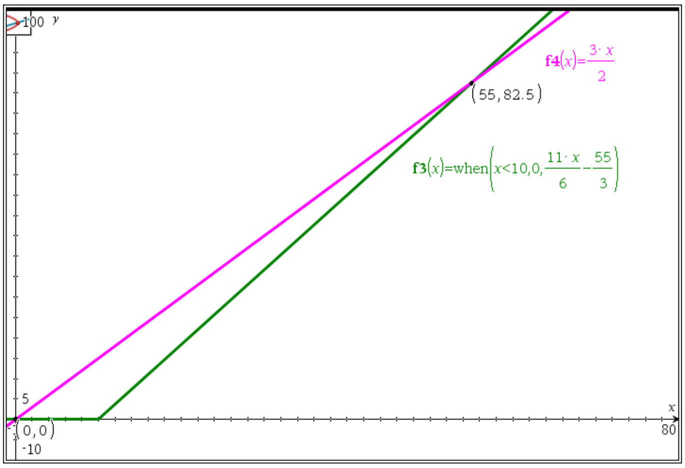
Si on choisissait comme instant zéro l'instant où la voiture s'arrête à l'aire de repos, on obtiendrait comme formules:

$$\begin{cases} f(t)=0 \quad \textbf{si } 0\le t\le 10 \\ f(t)=\dfrac{110}{60}(t-10)=\dfrac{11}{6}t-\dfrac{55}{3} \quad \textbf{si } t\ge 10 \end{cases}$$

gilbertjulia2013

et

$g(t)=\dfrac{90}{60}t=\dfrac{3}{2}t$ où t est maintenant le temps en minutes écoulé depuis l'instant où la voiture s'arrête à l'aire de repos (c'est un peu moins pratique).



3. Privilégier des « problèmes ouverts » dans lesquels différentes méthodes de résolution peuvent être envisagées.

3. Pour aller plus loin

Au niveau du collège, l'exercice pourrait être résolu avantageusement à l'aide d'un raisonnement proportionnel qui économise le recours à l'utilisation de fonctions.

Il y a plusieurs raisonnements possibles, par exemple une méthode de « décomposition-recomposition » (on cherche des correspondances simples entre temps de parcours et distances parcourues) :
Si en 60 minutes le camion parcourt 90 km, en 10 minutes, il parcourt 6 fois moins de distance soit 15 km : pendant l'arrêt de la voiture, le camion prend 15 km d'avance.
En 60 minutes, la voiture parcourt 20 km de plus que le camion. Pour rattraper 5 km il lui faudra 4 fois moins de temps soit 15 minutes, et pour rattraper 15 km il lui faudra trois fois 15 minutes donc 45 minutes.
Si la voiture parcourt 110 km en 60 minutes, en 15 minutes elle parcourt $\frac{1}{4}\times 110 = 27{,}5$ km et en 45 minutes elle parcourt $3\times 27{,}5 = 82{,}5$ km.