Sujet voie 3, 03. Corrigé de l'exercice « pour aller plus loin »

1. Une parabole d'équation $y = a x^2 + b x + c$ passe par les points A et C si :

$\begin{cases} c = 0 \\ 2a\cos^2 t + \sqrt{2}\, b\cos t + c = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$. En fonction de a et de t : $b = \tan t - a\sqrt{2}\cos t$

Une telle parabole a une équation de la forme : $y = a x^2 + \left(\tan t - a\sqrt{2}\cos t\right)x$ où a est un réel non nul.

2. Dans le repère $\left(A, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la droite (AC) a pour équation : $y = x\tan t$

L'aire située entre (AC) et cette parabole est égale à : $\int_0^{\sqrt{2}\cos t}\left(x\tan t - \left(a x^2 + \left(\tan t - a\sqrt{2}\cos t\right)x\right)\right)dx$ soit : $a\int_0^{\sqrt{2}\cos t}\left(\sqrt{2}\cos t\, x - x^2\right)dx = a\left[\sqrt{2}\cos t\,\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}\cos t} = \frac{a\sqrt{2}}{3}\cos^3 t$. On obtient le partage adéquat si cette aire vaut $\frac{1}{6}$, ce qui donne : $a = \frac{\sqrt{2}}{4\cos^3 t}$.

La parabole (P) a pour équation : $y = \frac{\sqrt{2}}{4\cos^3 t}x^2 + \left(\tan t - \frac{1}{2\cos^2 t}\right)x$

Lorsque $t = 0$, on obtient la parabole d'équation : $y = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x^2 - x\sqrt{2}\right)$. Dans ce cas, le point C est sur l'axe Ox et l'axe de la parabole est la diagonale (BD).

3.1. La tangente au point d'abscisse x_i a pour équation : $y = (2a x_i + b)(x - x_i) + y_i$ où $y_i = a x_i^2 + b x_i + c$ (et où $i = 1, 2$). Cette équation s'écrit : $y = (2a x_i + b)x - a x_i^2 + c$

L'abscisse du point d'intersection des deux tangentes est solution de l'équation : $(2a x_1 + b)x - a x_1^2 + c = (2a x_2 + b)x - a x_2^2 + c$ c'est-à-dire de : $2a(x_2 - x_1)x = a\left(x_2^2 - x_1^2\right)$

On obtient : $x = \frac{a\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2a(x_2 - x_1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

3.2. La fonction dérivée de $x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4\cos^3 t}x^2 + \left(\tan t - \frac{1}{2\cos^2 t}\right)x$ est :

$x \mapsto f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\cos^3 t}x + \left(\tan t - \frac{1}{2\cos^2 t}\right)$. Donc : $f'(0) = \left(\tan t - \frac{1}{2\cos^2 t}\right)$

La droite tangente en A à la parabole a pour équation : $y=\left(\tan t-\dfrac{1}{2\cos^2 t}\right)x$. Le point M est le point d'abscisse $x_M=\dfrac{\sqrt{2}.\cos t}{2}$ de cette droite, puisqu'il a même abscisse que le milieu de $[AC]$.

L'ordonnée de M est donc : $y_M=\dfrac{\sqrt{2}\,.\cos t}{2}\left(\tan t-\dfrac{1}{2\cos^2 t}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin t\cos t-\dfrac{1}{2\cos t}\right)$

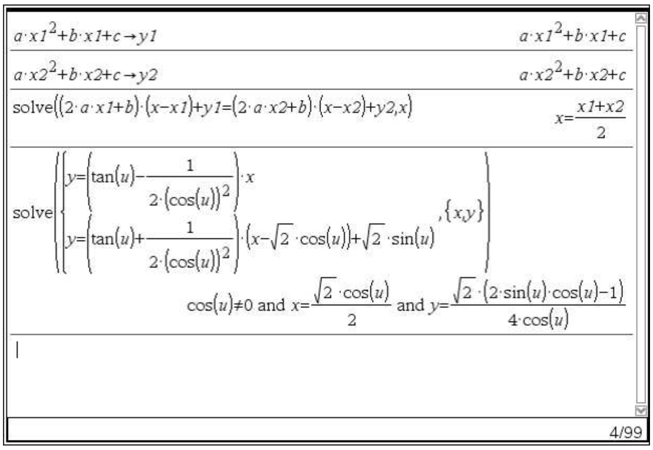
On peut aussi chercher une équation de la tangente en C et déterminer le point d'intersection des deux droites.

$$f'\left(\sqrt{2}\cos t\right)=\frac{1}{\cos^2 t}+\left(\tan t-\frac{1}{2\cos^2 t}\right)=\tan t+\frac{1}{2\cos^2 t}$$

La droite tangente en C à la parabole a pour équation : $y-\sqrt{2}\sin t=\left(\tan t+\dfrac{1}{2\cos^2 t}\right)\left(x-\sqrt{2}\cos t\right)$.

Déléguons la recherche des coordonnées du point d'intersection M au solveur :

Il affiche les mêmes résultats.



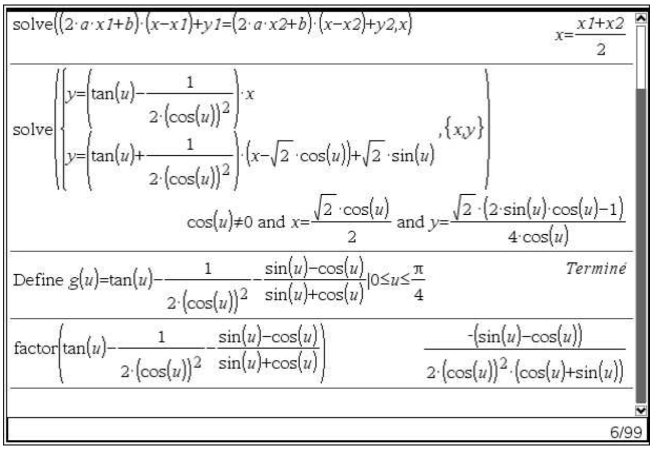
3.3. L'angle polaire de B est : $\left(\vec{i},\,\overrightarrow{AB}\right)=\left(\vec{i},\,\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=t-\dfrac{\pi}{4}\ \ (2\pi)$

Les coordonnées du point B sont donc : $\left(\cos\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right),\,\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos t+\sin t,\ \sin t-\cos t\right)$. Compte tenu de l'intervalle dans lequel se trouve t : $\sin t\geq 0$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos t+\sin t\right)\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos t$, l'abscisse de B est supérieure ou égale à celle des points I et M.

La droite (IM) coupe le segment $[AB]$ et non le segment $[BC]$.

3.4. Une équation de la droite (AB) est : $y=x\tan\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}x$. L'ordonnée du point J est par conséquent $y_J=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\cos t$

Il en résulte que : $y_M-y_J=\dfrac{\sqrt{2}.\cos t}{2}\left(\tan t-\dfrac{1}{2\cos^2 t}-\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}\right)$. Le signe de cette différence est le même que celui de la parenthèse.

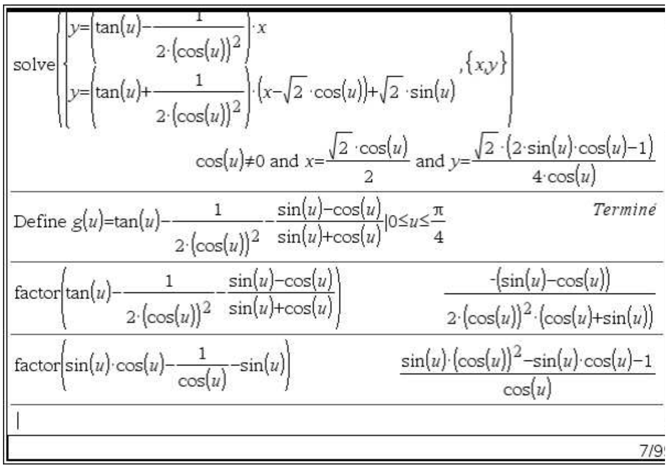


Celle-ci se factorise en : $\dfrac{\cos t-\sin t}{2\cos^2 t(\cos t+\sin t)}$, elle est du signe de $\cos t-\sin t$, donc positive puisque t appartient à l'intervalle $\left[\,0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Le fait que M soit au dessous de I résulte quant à lui des propriétés de convexité de la parabole.

On peut éventuellement vérifier par le calcul :

$$y_M-y_I=\frac{\sqrt{2}.\cos t}{2}\left(\tan t-\frac{1}{2\cos^2 t}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin t\cos t-\frac{1}{2\cos t}-\sin t\right)$$



Cette parenthèse se factorise en une expression du second degré en $\sin t.\cos t=\dfrac{1}{2}\sin 2t$, expression qui est négative dans l'intervalle $\left[\,0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ où se trouve $\cos t.\sin t$.

3.5. Le point M étant au dessus du point J appartient au segment [IJ] qui est inclus dans le carré $ABCD$. Le carré étant convexe et contenant les trois points A, M, C, il contient le triangle AMC et donc le domaine Δ. L'arc de parabole P situé entre A et C est entièrement dans le carré. Lui et son symétrique par rapport à (AC) fournissent une solution au problème.