

## ESD troisième voie, sujet 03. Calculs d'aires

### 1. Le sujet

#### Exercice

On se propose de partager un carré  $ABCD$  de côté 1 en trois parties de même aire.

1. Soit un point  $M$  appartenant au segment  $[AB]$  et  $N$  son symétrique par rapport à  $(BD)$ . On considère les triangles  $ADM$ ,  $DCN$  et le quadrilatère  $MBND$ . Cette méthode permet-elle de répondre au problème posé ?
2. On considère une parabole  $(P)$  qui contient les points  $A$  et  $C$  et la parabole symétrique de  $(P)$  par rapport à la droite  $(AC)$ . Cette méthode permet-elle de répondre au problème posé ?

#### La réponse orale d'un élève à la question 1.

« La méthode est bonne. Je vois sur mon ordinateur que l'aire du quadrilatère  $MBND$  passe de 0 à 1 lorsque  $M$  se déplace de  $A$  à  $B$  donc obligatoirement elle est égale à  $1/3$ . »

#### Le travail à exposer devant le jury.

1. Quelles sont les compétences mises en jeu dans l'exercice ?
2. Analyser la réponse proposée par l'élève.
3. Proposer pour des élèves de la classe de terminale un corrigé de la question 2 en choisissant un repère adapté au problème.
4. Donner deux ou trois exercices sur le thème « calculs d'aire »

### 2. Eléments de correction

1. *Compétences mise en jeu* : je serais tenté de répondre « aucune », mais peut-être cette réponse est trop provocatrice. Les « compétences » dépendent de la place de l'exercice dans la progression.

Si l'exercice est posé à l'improviste, on peut admettre, avec une certaine dose de langue de bois, que la compétence visée est de savoir développer une démarche scientifique (modéliser, s'engager dans une voie de recherche, savoir utiliser conjointement plusieurs outils mathématiques, conduire un raisonnement pour mener une analyse critique). Mais sans aucune conviction ...

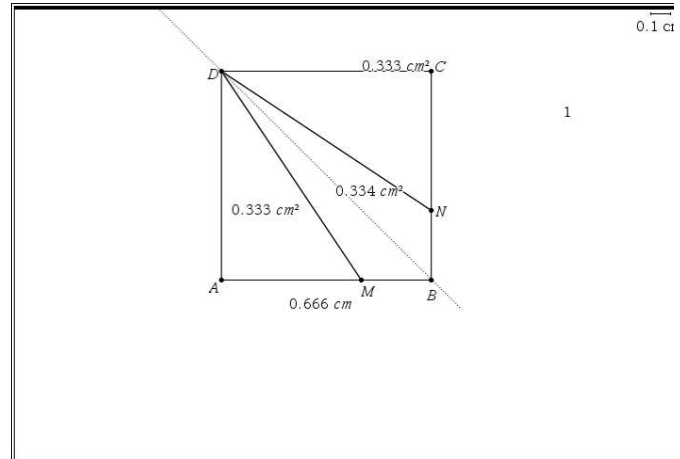
Si l'exercice est posé juste après la notion d'intégrale et son interprétation en termes d'aire, la question 1 servant de mise en situation pour la question 2, on peut admettre que la compétence visée est de « savoir appliquer une méthode éprouvée, savoir mobiliser ses connaissances ». Mais il y a nettement mieux comme exercice d'application sur le sujet « aires et intégrales » ...

En revanche, quelques savoirs et savoir-faire saupoudrent la résolution :

- Savoir que deux domaines isométriques ont la même aire.
- Connaître la propriété d'additivité des aires (une réunion de domaines disjoints a pour aire la somme des aires des domaines qui la composent).
- Savoir reconnaître un « domaine sous la courbe » et calculer son aire à l'aide d'une intégrale.

2. C'est le même élève que celui qui a répondu au sujet 11... On peut lui adresser le même commentaire (voir sujet 11).

Vu que sa réponse est « orale », il n'est pas tenu à une rigueur dans la conduite du raisonnement, il émet une idée brute, qu'il faut lui faire préciser. Il pense implicitement à une application du théorème des valeurs intermédiaires. Ce n'est certes pas la démarche la plus pertinente, mais c'est une démarche recevable. Cet élève s'est précipité sur son ordinateur sans réflexion préalable. On pourra lui poser trois questions :



- Plutôt que d'utiliser immédiatement un logiciel de géométrie, n'aurait-il pas été pertinent de commencer par faire un croquis pour alimenter une première réflexion (qui aurait peut être révélé une solution très simple et économisé le recours au logiciel, coûteux en temps) ?
- Puisque l'ordinateur est là, est-il possible de faire une conjecture à propos de la position de  $M$  sur  $[AB]$  correspondant au partage en trois parties égales ? La distance  $AM$  optimale, trouvée empiriquement avec le logiciel, est de l'ordre de 0,66 et cette valeur peut faire penser à quel nombre rationnel simple ?
- Si l'on veut mettre en œuvre la démarche ébauchée, comment alors exprimer mathématiquement le fait que «  $M$  se déplace de  $A$  à  $B$  » ?

La « réponse de l'élève », probablement fabriquée par le jury pour les besoins de la cause, sert à mettre en valeur les possibilités et, en l'occurrence, les limites du recours au logiciel de géométrie dynamique. L'employer comme outil d'investigation systématique n'est pas souhaitable. Une réflexion préalable, appuyée s'il le faut sur un croquis « à main levée » permet de se faire une idée du problème posé et d'orienter sa démarche soit vers une figure soignée et une résolution (c'était ici l'option la plus pertinente), soit vers un recours raisonné à une figure dynamique. L'élève en question fait certes preuve de la compétence « Connaître et pouvoir utiliser différents outils et instruments (y compris les nouvelles technologies d'information) pouvant contribuer à l'activité mathématique » mais n'a pas le recul suffisant pour apprécier l'opportunité de cette utilisation. Cet élève n'a pas su « anticiper sur ce qu'il peut se produire et pourquoi ». On peut même avancer que son recours au logiciel a été pour lui une entrave à une bonne compréhension de la situation : cet élève n'a pas su l'analyser ni, conformément à la démarche qu'il ébauche, la modéliser (il n'a pas eu conscience d'une variable, la distance  $AM$ , permettant d'exprimer facilement les aires des trois pièces du puzzle), il a seulement défini le quadrilatère  $AMBN$  puis cliqué sur l'outil « mesures, aires » de son logiciel. A sa décharge, reconnaissons que cet élève était en droit d'attendre une situation moins décevante et une résolution plus coriace.

3. Cette question de la part du jury me laisse perplexe et je reconnais ne pas en saisir la subtilité.

Si on pense à rapporter le plan au repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ , alors il devient évident que la parabole d'équation  $y = x^2$  et sa symétrique  $(P')$  par rapport à  $(AC)$  fournissent une solution au problème. L'aire du domaine situé entre  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $(P)$  est « l'aire sous la courbe » dont  $(P)$  est représentative, soit  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ . Son domaine symétrique par rapport à  $(AC)$  est le domaine situé entre  $[AD]$ ,  $[DC]$  et  $P'$  puisque la réflexion d'axe  $(AC)$  échange les points  $B$  et  $D$ . Il a la même aire que le domaine dont il est symétrique, et le domaine restant entre  $(P)$  et  $(P')$  a donc aussi pour aire  $\frac{1}{3}$ . On peut vérifier que c'est la seule. Une parabole passant par  $A$  et par  $C$  a une équation de la forme :  $y = ax^2 + (1-a)x$  et  $\int_0^1 (ax^2 + (1-a)x) dx = \frac{a}{3} + \frac{1-a}{2} = \frac{3-a}{6}$ .

Cette intégrale vaut  $\frac{1}{3}$  seulement quand  $a = 1$

Le point clef de la démarche est précisément de penser à utiliser un repère adapté, et ce point clef devrait être laissé à l'appréciation des élèves.

Une autre parabole pourrait remplacer  $P'$  pour réaliser un partage convenable : la parabole  $P''$  image de  $P$  par la symétrie centrale de centre  $I$  milieu de  $[AC]$ . Cette symétrie centrale, tout comme la réflexion d'axe  $(AC)$ , laisse en effet le carré globalement invariant.

Le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  n'est pas le seul possible. Le lecteur pourra envisager ce qu'il se passe dans un repère d'origine  $A$  où  $C$  aurait pour coordonnées  $(0 ; \sqrt{2})$

4. Voir REDCM pages 169 et 170, peut-être aussi page 85.

### 3. Commentaire personnel

*Vu le ton de l'énoncé, cet exercice ressemble à un exercice « avec prise d'initiative ». Peut-on le considérer comme tel ? On peut s'interroger. Dans la question 1, il suffit de remarquer que les triangles rectangles  $ADM$  et  $DCN$  doivent avoir une aire égale à  $\frac{1}{3}$ , donc qu'il faut choisir  $AM = CN = \frac{2}{3}$ . Cette question se résout par une simple remarque, le « calcul d'aires » est trivial. On ne peut parler de « méthode » comme le dit l'énoncé.*

*La résolution de la question 2 semble résulter quant à elle d'un parachutage (celui du repère). Si on suggère le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ , repère qui vient le plus facilement à l'esprit et qui correspond à la démarche probablement attendue, il suffit ensuite de savoir que  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$  pour exhiber une parabole solution.*

*Dans les deux cas, le résultat découle d'un « eureka » et non d'une argumentation mathématique. Il n'y a rien à « chercher » avant de « trouver ».*

*Ainsi, en première lecture, l'énoncé fait penser à une authentique « situation de recherche » mais après analyse, cet exercice s'avère n'en être qu'une caricature. On peut être réservé, sinon sceptique, sur la capacité de cet exercice à susciter un apprentissage à cause de l'inconsistance de son contenu.*

*Ce genre d'exercice discrédite le dispositif inductif qui, ici, tourne à vide. Ce dispositif ne peut avoir du sens que si la situation proposée aux élèves présente un contenu mathématique suffisamment riche pour justifier une recherche puis une démarche de résolution.*

*La situation proposée pourrait devenir plus intéressante si l'on demande **plusieurs** paraboles  $P$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ , telles que  $P$  et sa symétrique par rapport à  $(AC)$  réalisent une partition du carré en trois parties de même aire. Une condition sur  $P$  serait que l'arc  $0 \leq x \leq 1$  de ces paraboles devrait être contenu dans le triangle  $ABC$  pour qu'il n'y ait pas de chevauchement avec l'arc symétrique. Par exemple :*

- Une parabole qui passe par  $A$  et par  $C$  (celle de l'énoncé).
- Une qui passe par  $A$  et par  $B$ .
- Une qui est tangente en  $A$  à  $(AC)$ .

*Là il y a une certaine dose de recherche, d'abord sur les conditions à imposer dans chaque cas sur les coefficients  $a, b, c$  puis sur le calcul de l'intégrale  $\int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx$*

*Si l'on recherche des paraboles **d'axe quelconque** passant par  $A$  et  $C$ , le problème devient nettement plus ardu, affaire à suivre ...*

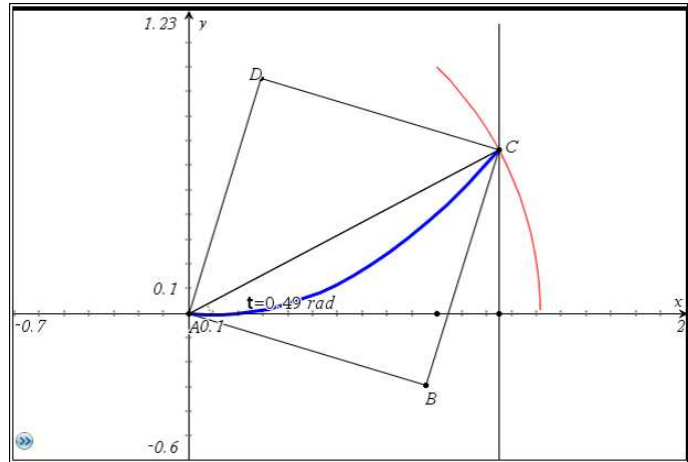
### 3. Pour aller plus loin

Si vous êtes en train de préparer l'oral du CAPES 2012, ce qui suit n'est pas pour vous, vous avez certainement « d'autres chats à fouetter ». Si vous travaillez sur un plus long terme, l'exercice que je vous propose peut éventuellement vous servir d'entraînement à l'écrit.

Nous venons de trouver une parabole ( $P$ ) dont l'axe est la droite ( $AD$ ) permettant de construire une solution « évidente » au partage du carré en trois domaines d'aire égale.

On peut toutefois imaginer des paraboles plus exotiques, dont l'axe ne serait plus nécessairement parallèle à ( $AD$ ).

On considère un repère orthonormal  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  d'origine  $A$ . Soit  $t$  un nombre réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ . On suppose que le point  $C$  a pour coordonnées  $(\sqrt{2} \cos t; \sqrt{2} \sin t)$  dans le repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , et que le carré  $ABCD$  est de sens direct (l'angle  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  a pour mesure  $+\frac{\pi}{4}$ ).



1. Une parabole  $P$  d'équation  $y = ax^2 + bx + c$  où  $a$  est un réel strictement positif passe par les points  $A$  et  $C$ . Exprimer les coefficients  $b$  et  $c$  en fonction de  $a$  et de  $t$ .

2. On désigne par  $S$  l'aire du domaine  $\Delta$  situé entre ( $AC$ ) et cette parabole. Exprimer cette aire en fonction de  $a$  et de  $t$ . Déterminer  $a$  en fonction de  $t$  de sorte que :  $S = \frac{1}{6}$ . Quelle est cette parabole lorsque  $t = 0$  ?

3. Pour que  $P$  et la parabole  $P'$  symétrique de  $P$  par rapport à ( $AC$ ) répondent au problème posé, il reste à s'assurer que le domaine situé entre  $P$  et  $P'$  est inclus dans le carré  $ABCD$  (la parabole  $P$  ne doit pas « sortir » du carré). C'est l'objectif de cette question.

On désigne par  $T_A$  (respectivement  $T_C$ ) la tangente en  $A$  (respectivement en  $C$ ) à  $P$ . Ces deux tangentes se coupent en  $M$ . On admet que, pour des raisons de convexité de la parabole, le domaine  $\Delta$  est inclus dans le triangle  $AMC$ .

3.1. Etant donnée une parabole d'équation  $y = ax^2 + bx + c$ , on note  $T_1$  et  $T_2$  les tangentes à la parabole en deux points d'abscisses distinctes  $x_1$  et  $x_2$ . Montrer que le point d'intersection des deux tangentes a pour abscisse  $\frac{x_1 + x_2}{2}$ .

3.2. Ecrire une équation de la tangente en  $A$  à  $P$  et déterminer les coordonnées du point  $M$ .

3.3. Exprimer en fonction de  $t$  les coordonnées de  $B$ . Justifier que l'abscisse de  $B$  est supérieure ou égale à celle des points  $I$  et  $M$ .

3.4. Soit  $J$  le point d'intersection de ( $IM$ ) et de ( $AB$ ). Montrer que  $M$  est entre  $I$  et  $J$ . Conclure.

