ESD 2011 – 11 : Calcul intégral

1. Le sujet

Exercice

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x(1 - x^2)$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$

1) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

2) Existe-t-il une droite (Δ) passant par l'origine et partageant le domaine $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire ?

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation

Réponse d'un élève à la question 2.

On veut couper la partie en deux parties de même aire donc $\frac{1}{8}$. Une droite qui passe par l'origine a pour équation $y = a\,x$. Je cherche le point M d'intersection avec la courbe :

$x(1 - x^2) = a\,x$

$1 - x^2 = a$

$x^2 = 1 - a$

$x = \sqrt{1-a}$

$M\left(\sqrt{1-a}\ ;\ a\sqrt{1-a}\right)$

L'aire entre la courbe et la droite doit être égale à $\frac{1}{8}$ donc :

$\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1 - x^2)\,dx - \int_0^{\sqrt{1-a}} a\,x\,dx = \frac{1}{8}$. C'est trop compliqué, j'arrête.

Je vois que l'aire entre la courbe et la droite vaut 0 quand M est en O et vaut $\frac{1}{4}$ quand M est en $I\ (1, 0)$ donc forcément elle vaut $\frac{1}{8}$ à un moment.

Le travail à exposer devant le jury

1. Analysez la production de l'élève. Quels sont selon vous ses acquis ? Sa démarche vous paraît-elle pertinente et quelles erreurs avez-vous repérées ?

2. En vous appuyant sur la démarche de l'élève, proposez une correction de la question 2) telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3. Présentez deux ou trois exercices dont la résolution fait appel au calcul intégral.

2. Eléments de correction

L'exercice proposé est un exercice de recherche, dont l'énoncé est ouvert et n'oriente vers aucune démarche de résolution. Il est cependant donné en tant qu'exercice d'évaluation. L'exercice évalue la capacité des élèves à construire une solution personnelle et à mobiliser à cet effet leurs connaissances de l'intégration et du calcul d'aires.

1. Acquis de l'élève.

- Une bonne maîtrise du lien entre intégrales et aires. Il a calculé correctement l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et il interprète de façon correcte, en termes d'intégrales, l'aire de la partie de $\mathcal{D}$ située entre (C) et la droite (Δ).
- Il sait changer de registre et transformer les données géométriques du problème en données graphiques puis numériques : il modélise la donnée « droite passant par l'origine » en « droite d'équation $y = ax$ » puis il formule la question posée dans le registre numérique (le problème se ramène pour cet élève à résoudre une équation) donc dans un autre registre que le registre de l'énoncé.
- Il sait s'engager dans une démarche de résolution et conserver une attitude critique sur la pertinence de sa démarche. Il sait changer de stratégie lorsqu'il considère que sa démarche initiale est vouée à l'échec. Cet élève a d'abord cherché à *déterminer* la droite (Δ), ce qui l'a conduit à tenter de résoudre $\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} a\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$. Puis il s'est aperçu que l'énoncé ne lui demandait pas ce travail : il a abandonné cet objectif qu'il a jugé trop ambitieux pour seulement tenter d'établir l'*existence* de la droite (Δ) en tentant de justifier que $\int_0^{\sqrt{1-a}} x(1-x^2)\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} a\,x\,\mathrm{d}x$ vaut 1/8 « à un moment ». Il « voit » la solution, en se référant implicitement au théorème des valeurs intermédiaires. Il propose finalement une solution pertinente, certes non justifiée, mais que l'enseignant pourra faire expliciter.

2. Erreurs relevées

- Sa résolution de l'équation $x(1-x^2) = a\,x$ est incomplète : il ne tient pas compte que l'origine est un premier point d'intersection, puis il ne discute pas suivant les valeurs de a l'existence d'un autre point d'intersection (il ne se pose pas la question de la validité de « $x = \sqrt{1-a}$ »). Cependant, ces négligences n'ont aucune incidence sur le traitement de l'exercice.
- Il ne sait pas exposer son idée finale : « l'aire entre la courbe et la droite » n'est pas identifiée clairement en tant que fonction de a. Le concept de « fonction définie par une intégrale » n'est pas acquis. Il en découle que cet élève ne fait pas référence au théorème des valeurs intermédiaires sous jacent. Il commet donc l'erreur de ne pas vérifier l'hypothèse de continuité, indispensable pour pouvoir appliquer ce théorème.

En revanche, le fait de ne pas avoir calculé l'intégrale car « c'est trop compliqué » n'est pas une erreur. L'élève est libre de son choix et rien n'obligeait à ce calcul.

3. Une correction appuyée sur la démarche de l'élève.

L'enseignant peut reprendre à son compte la modélisation de l'élève :

1. Une droite variable passant par l'origine, c'est une droite d'équation $y = a\,x$, son coefficient directeur a peut être choisi pour paramètre permettant de décrire la situation.

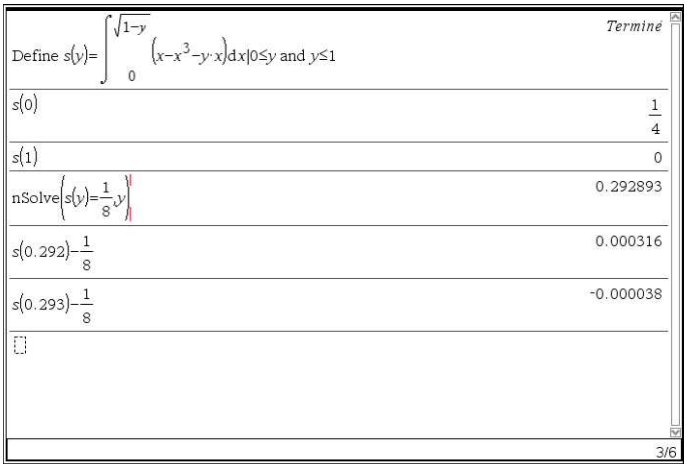
2. Il faut rechercher, lorsqu'il existe, le deuxième point d'intersection de (Δ) avec (C). On ajoute que (Δ) et (C) ont en commun l'origine puis que, pour $0 \leq a \leq 1$, il y en a un deuxième (éventuellement confondu avec O pour la valeur 1). Mais on peut attendre pour apporter ces précisions.

3. L'enseignant peut faire exprimer à l'aide d'une intégrale l'aire de chacune des régions de $\mathcal{D}$ délimitées par (Δ). Si l'on retient la même partie que l'élève, l'aire de cette partie est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par : $S(a)=\int_0^{\sqrt{1-a}} x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x - \int_0^{\sqrt{1-a}} a\,x\,\mathrm{d}x$. On fait clairement apparaître qu'il s'agit d'une fonction de a.

4. On peut questionner l'élève sur ce qu'il voulait réellement faire dans sa solution, en espérant qu'une référence au théorème des valeurs intermédiaires va émerger. On va alors faire énoncer ce théorème, avec ses hypothèses. Les valeurs aux bornes ont correctement été calculées par l'élève, mais il faut préciser pour quelle valeur de a le point M est un O et pour quelle valeur il est en I.. Surtout, se pose la question de savoir de quelle fonction il va s'agir : « c'est bien $a \mapsto S(a)$, mais il faut justifier sa continuité ».

Par théorème (admis en TS) chacune des fonctions $b \mapsto \int_0^b x\,\mathrm{d}x$ $b \mapsto \int_0^b x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$ est continue. Chacune des fonctions : $a \mapsto \sqrt{1-a} = b \mapsto \int_0^b x\,\mathrm{d}x$ et $a \mapsto \sqrt{1-a} = b \mapsto \int_0^b x\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x$ est une composition de fonctions continues. La fonction $a \mapsto S(a)$ est continue sur $[0 ; 1]$en tant que cocktail de fonctions continues. L'existence d'une valeur a_0 de a pour laquelle la valeur intermédiaire 1/8 est prise est dès lors justifiée. On peut admettre la stricte décroissance de $a \mapsto S(a)$ en s'appuyant sur un argument graphique. Il y a donc une et une seule droite (Δ) répondant à la question.

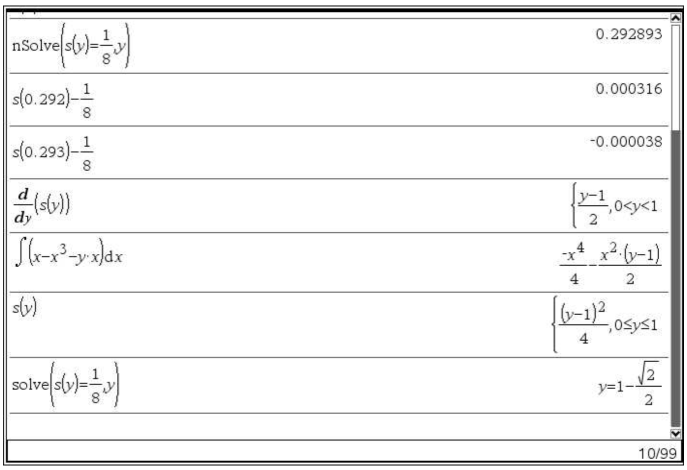
Le solveur numérique indique 0,292893 comme valeur approchée de a_0 mais nous n'avons aucune information sur la qualité de cette approximation. Il est préférable de proposer un encadrement : $0{,}292 < a_0 < 0{,}293$ justifié par le fait que la fonction $a \mapsto S(a)-\dfrac{1}{8}$ est continue et change de signe entre 0,292 et 0,293.



On peut maintenant s'interroger : est-ce que l'élève a bien fait de jeter l'éponge dans le calcul effectif de $S(a)$? Plusieurs indices nous font penser qu'on pouvait creuser un peu plus :

- Le calcul de la dérivée de $a \mapsto S(a)$ (qui peut servir à justifier, a fortiori, la continuité de cette fonction).
- Le calcul d'une primitive de $x \mapsto \left(x-x^3\right)-a\,x$
- Le calcul effectif de $S(a)$ qui s'avère être un polynôme très simple.

. La résolution exacte est possible. Une seule droite (Δ) répond à la question, celle de coefficient directeur $a_0 = 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



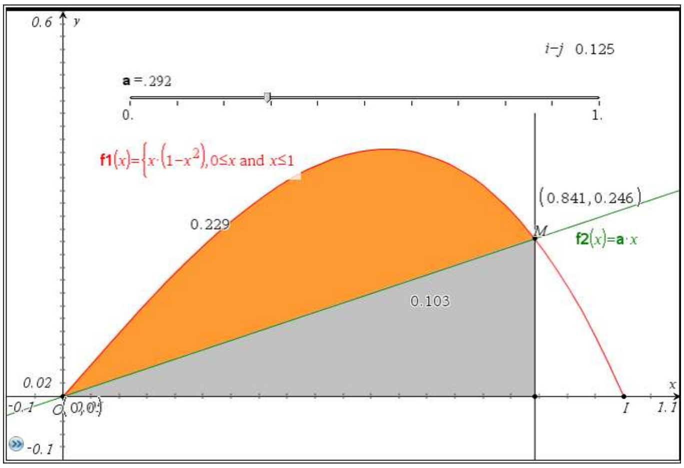
Pour terminer, il reste à comparer les deux solutions. La résolution exacte exploite une double opportunité : le fait que $S(a)$ est calculable par une intégration très simple et le fait que l'équation $S(a)=\frac{1}{8}$ est une équation que l'on sait résoudre. La résolution de l'élève est plus générale et transférable à des fonctions la fonction *f* de l'énoncé.

Le candidat au CAPES peut défendre, à son choix, l'une ou l'autre thèse. Il est clair que le jury a choisi intentionnellement une fonction *f* particulière, permettant cette double résolution.

3. Pour aller plus loin

Analyse graphique avec le logiciel nSpire.

Le graphique a été confectionné avec le logiciel nSpire. On y reconnaît en **f1** la fonction *f* de l'énoncé. On y a tracé une droite passant par l'origine d'équation $y=f_2(x)=a\,x$ La valeur *a* de son coefficient directeur est modifiée à l'aide d'un curseur.
On a calculé l'aire de l'aire sous la courbe représentative de **f1**, et l'aire sous la courbe représentative de **f2**. La différence $i-j$ a été calculée, c'est l'aire du domaine colorié en orange. En agissant sur le curseur, on fait varier cette aire.



1. Dans l'esprit de l'exercice, il est important que les élèves gardent l'initiative, y compris celle de la modélisation. L'enseignant présentera ce graphique en synthèse, pour clore la correction de l'exercice et visualiser les résultats. Il peut, après avoir fait varier l'aire, stocker la valeur $a_0=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$ en variable **a** et faire constater qu'effectivement cette valeur correspond au partage du domaine $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire.

2. Si l'enseignant veut amener ses élèves à une résolution exacte, dans le cadre d'une séance de TD, il peut utiliser ce graphique en début de recherche, après que les élèves aient modélisé le pivotement de (Δ) autour de *O* par une équation de (Δ) de la forme $y=a\,x$. On peut ainsi *conjecturer* sur l'écran ci-dessus l'existence d'une valeur a_0 voisine de : $a=0{,}292$ pour laquelle l'aire du domaine orangé est la moitié de l'aire de $\mathcal{D}$. Le challenge sera d'en découvrir la valeur exacte.