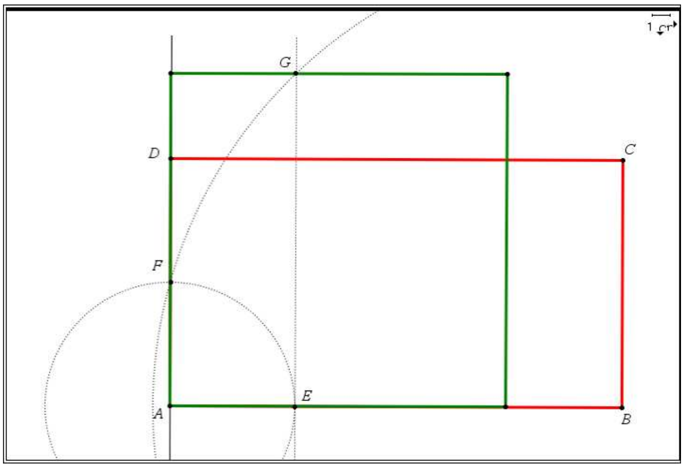
ESD 2011 – 10 : Problème de construction

1. Le sujet

Voici une traduction en langage contemporain d'un document du XVIIème siècle écrit par le mathématicien hollandais Samuel Marolois (1572-1627).

Soit ABCD un rectangle et F le milieu de [AC]. Le cercle de centre A et de rayon AF coupe [AB] en E. Le cercle de centre B et de rayon BF coupe la perpendiculaire à [AB] passant par E en G. GE est la longueur du côté d'un carré dont l'aire est égale à l'aire du rectangle ABCD.



Justifier la dernière affirmation du texte.

Les solutions proposées par deux élèves

Elève 1 :

Je fais une figure avec 4 cm et 7 cm et je vais démontrer que l'aire du carré vaut 28 cm^2.

Avec le théorème de Pythagore dans le triangle BAF j'ai : $BF^2 = AB^2 + AF^2 = 49 + 4$

Donc : $BF^2 = 53$, $BF = \sqrt{53} = 7{,}28$.

Dans le triangle rectangle EBG, j'ai : $GB^2 = EB^2 + EG^2$, $7{,}28^2 = 25 + EG^2$. *J'obtiens* $EG = 5{,}29$ *donc l'aire du carré est 27,98. Les deux aires sont égales.*

Elève 2 :

J'ai mesuré sur le dessin et j'ai trouvé 2,8 cm et 5,3 cm. Je vais démontrer que $GE^2 = 14{,}84\ cm^2$

Pythagore dans le triangle EGB : $14{,}84 = GB^2 - EB^2 = FB^2 - 15{,}21$.

Or $FB^2 = 30{,}05$ *(Pythagore dans le triangle FAB). D'où* $14{,}84 = 30{,}05 - 15{,}21$ *vrai.*

Le travail à exposer devant le jury

1. Analyser la production de chaque élève en mettant en évidence les compétences acquises et celles non acquises.

2. Quel peut être selon vous l'intérêt d'étudier des notions à travers une approche historique ?

3. Exposez une correction de l'exercice comme vous le feriez devant une classe de troisième.

4. Présentez deux ou trois problèmes de construction dont l'un au moins met en jeu un logiciel de géométrie dynamique.

2. Eléments de correction

Le but de l'exercice (son intitulé aurait pu être « quadrature du rectangle ») est de « construire un carré dont l'aire est égale à celle d'un rectangle donné ». Ce qui revient, en d'autres termes, à construire la moyenne géométrique de deux nombres. Si on désigne par $x = AB$ et $y = AD$, alors $EG = \sqrt{x\,y}$.

1. Analyse des productions d'élèves

	Elève 1	Elève 2
Compréhension	Non. Ajout délibéré d'une hypothèse ne figurant pas dans l'énoncé : « *ABCD* est un rectangle de côtés 4 cm et 7 cm ». Cet élève raisonne sur un exemple qu'il s'est lui-même choisi.	Non. Raisonne sur la figure accompagnant le texte de l'énoncé. Il se peut que la consigne ait été mal précisée par l'enseignant à propos du statut de cette figure.
Réalisation	Non. La procédure de résolution est correcte mais la procédure de calcul est incorrecte. Cet élève ne fait aucune distinction entre valeur exacte et arrondi.	Non. Procédure de résolution incorrecte. Cet élève incorpore la conclusion recherchée (« *je vais démontrer que* $GE^2 = 14{,}84\ cm^2$ ») dans ses hypothèses, il aboutit ainsi à une tautologie.
Rédaction	Oui. L'incohérence sur l'égalité des deux aires est due plutôt à sa conception incorrecte de l'égalité des nombres qu'à sa rédaction.	Oui, bien que « Pythagore dans le triangle … » ne soit pas une formulation acceptable sur une copie.

Les productions des deux élèves ne sont donc pas valides.

Compétences acquises et non acquises :

Cette question est embarrassante. Il paraît peu rationnel de prétendre distinguer le degré d'acquisition de « compétences » au vu d'un document de quelques lignes. Une observation de compétences ne vaut que sur la durée[1].

Cela donnerait à peu près ceci, en se référant au catalogue des compétences selon le rapport PISA/OCDE :

<table>
<tr><th></th><th>Elève 1</th><th>Elève 2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Acquis</td><td colspan="2">Avoir un certain sens de l'heuristique</td></tr>
<tr><td>Savoir développer une argumentation mathématique</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Non acquis</td><td colspan="2">Utiliser des variables</td></tr>
<tr><td colspan="2">Opérer la conversion de la langue naturelle vers le langage symbolique et formel</td></tr>
<tr><td></td><td>Etre informé des limites des outils et des instruments</td></tr>
</table>

[1] On peut vérifier une non acquisition : « Il existe un cas où la compétence lambda ne fonctionne pas » alors qu'on n'est pas en mesure de garantir une acquisition : « quel que soit le cas, la compétence lambda fonctionne ».

Il semble nettement plus efficace d'entrer dans les détails, et de préciser les savoirs et savoir-faire sous-jacents à cet exercice correctement mis en œuvre ou non. Nous préférons la réponse suivante à la question posée et c'est celle que nous retiendrions :

Acquis par ces deux élèves :

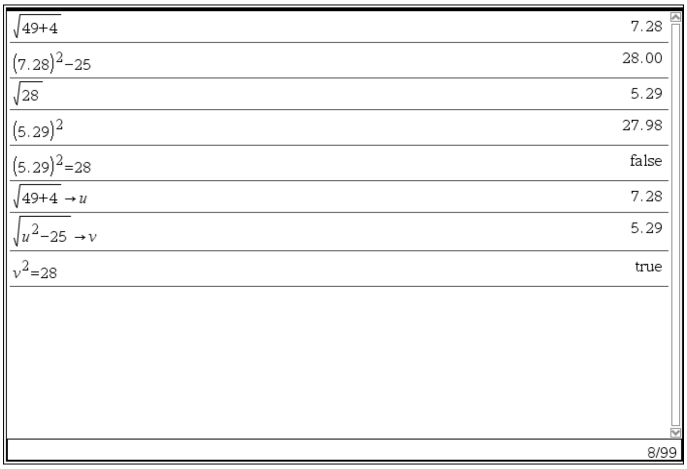
- La reconnaissance de figures simples (triangles rectangles non matérialisés) dans une figure complexe.
- L'application du théorème de Pythagore pour calculer dans un triangle rectangle la longueur d'un côté (hypoténuse ou un côté de l'angle droit) connaissant celles des deux autres.
- La capacité à rechercher un résultat intermédiaire non explicitement demandé dans l'énoncé (la longueur du segment [*BF*])
- Une mise en forme cohérente de la rédaction du raisonnement, décrivant fidèlement leur démarche.

Non acquis par ces deux élèves :

Principalement la capacité de raisonner en toute généralité par le recours à l'algèbre, c'est la remarque majeure à propos de leur production. Tous deux ont besoin de calculer avec des nombres.

De plus :

L'élève 1 n'a pas acquis la différentiation entre valeur exacte et valeurs approchées. Il effectue ses calculs sur des arrondis à la deuxième décimale, comme le fait la calculatrice avec un affichage « fixe 2 » (quatre premières lignes). Il utilise l'arrondi 5,29 de $\sqrt{28{,}00}$ qu'il élève au carré et qu'il arrondit ensuite. Il attribue l'écart de 0,02 à des erreurs d'arrondis, ce qui revient au « théorème en acte » suivant : « quand on fait des calculs avec des arrondis, si on obtient deux résultats très voisins, c'est que les deux nombres sont égaux ».



La calculatrice (cf. copie d'écran) pourrait cependant le faire douter en affichant deux conclusions apparemment contradictoires (« false » puis « true ») suivant le protocole calculatoire mis en œuvre …

L'élève 2 ne fait pas la différence entre « ce que l'on connaît » et « ce que l'on cherche ». D'autre part, il doit prendre conscience du statut de la figure géométrique au collège, devenue représentative d'une situation générale : des mesures sur une figure peuvent être effectuées pour émettre des conjectures, mais en aucun cas pour servir dans une preuve.

Question 2.

L'introduction commune aux programmes du collège (B du 06/08/2008) apporte un élément de réponse :

« *La perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées. Elle éclaire par des exemples le caractère réciproque des interactions entre sciences et techniques*. »

Une approche historique permet de comprendre comment une notion donnée a évolué au cours du temps :

- Pourquoi est-elle apparue (pour résoudre quel type de problème) ?
- Comment s'est-elle enrichie de nouveaux résultats (quelles ont été les avancées décisives) ?

- Comment a évolué sa formulation[2] (quelles étaient les définitions qui permettaient d'évoquer cette notion a un moment donné de l'histoire, comment étaient énoncés les théorèmes qui lui étaient liés) ?
- Quels ont été les obstacles épistémologiques qui ont freiné sa mise en place (comprendre que des savoirs qui paraissent maintenant aller de soi ont pu mettre plusieurs siècles pour se construire) ?

Question 3. Cet exercice permet de mettre en pratique une démarche « d'analyse remontante » (voir REDCM page 75) : « Nous connaissons l'aire du rectangle : c'est $AB \times AD$ .L'aire du carré est égale à EG^2 mais nous ne connaissons pas *EG* ni son carré. Il nous faut les calculer » :

- Recherche de configurations dans lesquelles le segment [*EG*] joue un rôle (les triangles rectangles *AEG* et *BEG*).
- Choix du « meilleur » triangle : plutôt *BEG* car nous savons que *BG* = *BF*, et *BF* nous serons en mesure de le calculer en considérant le triangle rectangle *BAF*.
- On remarque que, comme nous devons appliquer deux fois le théorème de Pythagore, plutôt que de considérer *BF, BG* ou *EG*, il nous suffit de considérer les carrés de ces nombres.

D'où le plan de travail :

1. Calcul de BF^2 sachant que [*BF*] est l'hypoténuse du triangle rectangle *BAF*.
2. Calcul de EG^2 sachant que [*EG*] est un côté de l'angle droit du triangle rectangle *BEG*.

Cet exercice fournit à partir de ce moment une **excellente occasion de promouvoir le recours à l'algèbre**, d'apprendre à utiliser des variables et à manipuler des expressions contenant des formules : « Il faut que notre raisonnement soit valable pour n'importe quel[3] rectangle. Pour effectuer les calculs, il est plus pratique d'attribuer des lettres aux longueurs des côtés du rectangle : nous allons poser $x = AB$; $y = AD$ »

On fera un premier point après le calcul de BF^2 (s'assurer que tout le monde est d'accord avec : $BF^2 = y^2 + \frac{x^2}{4}$) puis on calculera EG^2.

Question 4.

Voir REDCM pages 65 à 68.

[2] A ce propos, il peut être intéressant de confronter les élèves au texte original de certains problèmes ou de certaines solutions de problèmes, pour leur faire prendre conscience comment la langue, et avec elle le vocabulaire mathématique, a évolué. Il est certain que le langage de Samuel Marolois pour énoncer son problème et développer sa solution, compte tenu de la distance de quatre siècles qui nous sépare de lui, serait certainement pour les élèves un sujet d'étonnement. La traduction de tels textes en français contemporain serait matière à un travail pluridisciplinaire.

[3] La confection de la figure sur un logiciel de géométrie permettrait de conjecturer que, lorsqu'on modifie les dimensions du rectangle, quel que soit ce dernier l'égalité de l'aire du rectangle et de celle du carré demeure.