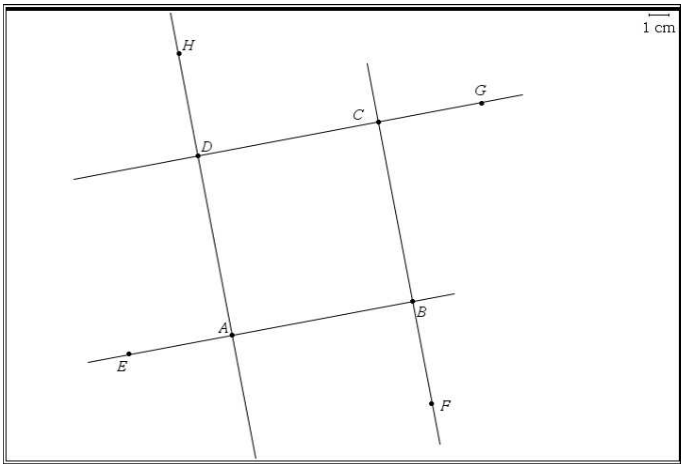
ESD 2011 – 07 : Configurations planes

1. Le sujet

Exercice

Soit *ABCD* un carré. On prolonge ses côtés par quatre segments de même longueur et d'extrémités *E*, *F*, *G*, *H* comme indiqué ci-contre. Montrer que le quadrilatère *EFGH* est un carré de même centre que *ABCD*.



B. Le travail à exposer devant le jury

1. Proposez plusieurs méthodes pour la résolution de cet exercice et indiquez pour chacune à quel niveau elle pourrait être envisagée.

2. Développez l'une de ces méthodes comme vous le feriez devant une classe du niveau considéré.

3. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « configurations planes ».

2. Commentaire

Cet exercice est représentatif d'un type assez fréquent : l'énoncé présente d'emblée une hypothèse forte qui peut être scindée en plusieurs hypothèses plus faibles (ici « *ABCD* carré » c'est-à-dire un quadrilatère qui est en même temps parallélogramme, un losange et un rectangle). J'attire à cette occasion votre attention sur un « bon réflexe » à avoir lorsqu'on prend connaissance d'un énoncé. Il s'agit de se poser quelques questions :

- Quel est au juste le rôle de chacune des hypothèses ?
- A quel moment de la résolution interviennent-elles ?
- Que se passe-t-il si on affaiblit l'hypothèse ?

En l'occurrence, avant de lire la correction, faites l'exercice et posez-vous ces questions …

3. Eléments de correction

L'exercice proposé est un exercice ouvert : aucune indication suggérant une méthode de résolution n'est donnée. La figure proposée avec l'énoncé est purement indicative (le quadrilatère *EFGH* n'y est pas matérialisé, le centre du carré *ABCD* n'y figure pas). Elle est là pour éviter que l'énoncé ne soit trop lourd (elle indique où sont placés les points *E*, *F*, *G*, *H* relativement à *A*, *B*, *C*, *D*). L'enseignant peut attirer l'attention sur la position de ces quatre points : *B*, *A*, *E* sont alignés puis *C*, *B*, *F* ainsi que *D*, *C*, *G* et que *A*, *D*, *H* le sont aussi et dans le même ordre.

Son objectif est la démonstration de propriétés de la configuration.

L'hypothèse « *ABCD* est un carré » particularise une configuration plus générale et ouvre l'éventail des pistes de résolution. Le fait de mentionner dans l'énoncé le centre du carré *ABCD* (que l'on notera *O* dans toute la suite de l'exposé) et de faire démontrer une propriété le concernant va privilégier très nettement les démarches dynamiques dans lesquelles ce point joue un rôle « central ».

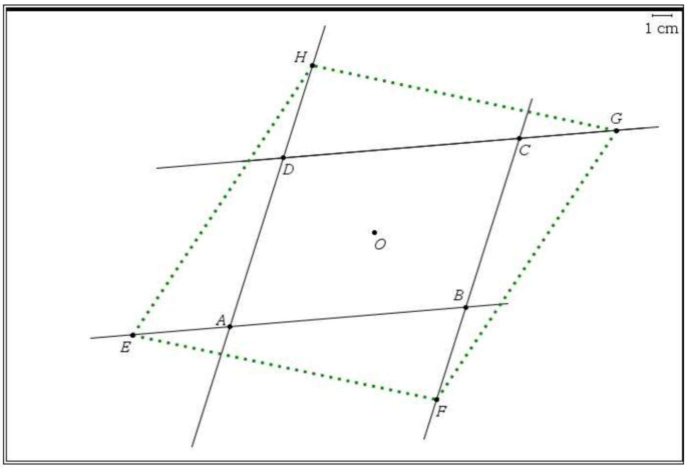
1. Méthode 1 : l'outil des configurations (configuration du parallélogramme, puis du triangle rectangle)

La démarche que je proposerais est la suivante :

- Démontrer d'abord que *EFGH* est un parallélogramme de centre *O* en utilisant la configuration du parallélogramme (niveau Cinquième).
- Démontrer ensuite que ce parallélogramme est un carré (niveau Quatrième).

Dans cette démarche, la totalité de l'hypothèse « *ABCD* est un carré » n'intervient que dans le deuxième point. Je proposerais en conséquence une modification de l'énoncé :

1. Soit *ABCD* un *parallélogramme*. On prolonge ses côtés par quatre segments de même longueur et d'extrémités *E*, *F*, *G*, *H* comme indiqué ci-contre.
1.1. Montrer que les segments [*AC*] et [*EG*] ont le même milieu
1.2. Montrer que le quadrilatère *EFGH* est un *parallélogramme* de même centre que *ABCD*.



L'idée de la démarche suggérée aux élèves est d'attirer l'attention sur les quadrilatères « intermédiaires » EBGD et FCHA. Ce sont des parallélogrammes dont une diagonale est aussi diagonale de ABCD et dont l'autre diagonale est diagonale de EFGH.

Au niveau d'une classe de Cinquième, l'exercice s'arrêterait là[1]*. Son intérêt est de faire utiliser au cours d'un même exercice différentes propriétés d'un parallélogramme (si un quadrilatère non croisé a deux côtés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme puis si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme).*

2. On suppose que *ABCD* est un carré. Montrer qu'alors *EFGH* est aussi un carré.

La question à se poser est « qu'est-ce que cette hypothèse (métrique) apporte de plus ? ». On est amené à s'intéresser aux triangles BEF et CFG (par exemple) et à des propriétés angulaires de ces mêmes triangles. La notion en jeu est maintenant la configuration du triangle rectangle.

On remarque qu'une seule des hypothèses « ABCD losange » ou « ABCD rectangle » n'apporte rien de plus à l'hypothèse « ABCD parallélogramme », il faut la concomitance des deux pour que la conclusion à propos de EFGH devienne à son tour plus forte.

[1] A ce niveau de classe, cette situation serait un très bon support à une initiation à la démonstration. On peut imaginer cet exercice résolu progressivement dans une séance de TD. On pourrait introduire d'abord deux des points, par exemple *E* et *G* et faire faire des conjectures à propos du quadrilatère *EBGD*. Ces conjectures sont alors démontrées (la question 1.1. n'est plus posée telle quelle, on démontre plutôt que *EBGD* est un parallélogramme). On introduit ensuite les deux autres points *F* et *H* pour s'intéresser à *EFGH*. Même dispositif : conjectures, puis démonstration. On conclut la correction de l'exercice en mettant en évidence les caractérisations du parallélogramme utilisées dans la résolution de l'exercice.

2. Méthode 2 : l'outil des transformations (niveau première S)

L'hypothèse « ABCD carré » fait envisager deux transformation candidates : la symétrie centrale de centre O (qui serait seule en jeu si la nature de ABCD était affaiblie en « parallélogramme ») mais aussi et surtout une rotation r de centre O et d'angle droit. Il faudrait supposer le plan orienté et ABCD « de sens direct » par exemple, ce qui ne diminue pas la généralité. On considèrerait l'une ou l'autre des deux rotations de centre O et d'angle + $\pi/2$ *ou bien -* $\pi/2$*. C'est l'une ou l'autre de ces transformations qui exploitent le plus économiquement l'hypothèse « ABCD carré ». En choisissant la première :*

Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\pi/2$

1. Quelle est l'image par r du carré $ABCD$?

2. Déterminer les images par r des points E, F et G.

3. En déduire que $EFGH$ est un carré de centre O.

La première question a pour objectif de faire apparaître que le carré ABCD est globalement invariant par r. Les triangles OAB, OBC, OCD et ODA étant tous rectangles isocèles directs de sommet O, r transforme respectivement A en B, B en C, C en D et D en A. Cette question est facultative, car la question de savoir quelles sont les images par r des points A, B, C, D se pose de toute façon ensuite.

L'hypothèse « même ordre d'alignement » est importante dans la question 2 : puisque r transforme A en B et B en C, r transforme la droite (AB) en la droite (BC). L'image de E par r est un point E' de (BC) tel que $BE' = AE$*. C'est la conservation de l'ordre d'alignement par une application affine qui permet d'identifier E' avec F. Les points E, F, G ont respectivement pour images F, G et H. Il suffit de rédiger une justification précise pour l'image de l'un des trois points, celui que l'on veut.*

La question 3 amène à une propriété plus générale spécifique des rotations d'angle droit : étant donné un point du plan M_1 *distinct du centre O de la rotation, si on considère les points :* $M_2 = r(M_1)$, $M_3 = r(M_2)$ *et* $M_4 = r(M_3)$ *alors* $r(M_4) = M_1$ *et* $M_1M_2M_3M_4$ *est un carré de centre O.*

En effet, si r est une rotation de centre O et d'angle droit, $r \circ r$ *est la rotation de centre O et d'angle plat, c'est-à-dire la symétrie centrale s de centre O, transformation involutive, et la puissance quatrième de r est l'application identique du plan :* $r^4 = (r \circ r) \circ (r \circ r) = s \circ s = I_d$*. En particulier :* $r(M_4) = r^4(M_1) = M_1$

A propos de $M_1M_2M_3M_4$ *:*

M_1 *et* M_3 *de même que* M_2 *et* M_4 *sont échangés par la symétrie centrale s. Le point O est donc milieu commun de* $[M_1M_3]$ *et de* $[M_2M_4]$ *:* $M_1M_2M_3M_4$ *est au moins un parallélogramme.*

r transformant le couple (M_1, M_3) *en le couple* (M_2, M_4) *:* $M_1M_3 = M_2M_4$ *par conservation de la distance par une rotation et* $(M_1M_3) \perp (M_2M_4)$ *car r est une rotation d'angle droit. Le parallélogramme* $M_1M_2M_3M_4$ *a des diagonales perpendiculaires et de longueur égale : c'est un carré.*

3. Voir REDCM pages 55 à 57 puis 74 et 75. Cependant, le thème « Configurations planes » semble actuellement plus étendu qu'il ne l'était lors de la parution de l'ouvrage. L'étude d'une « configuration mobile » par exemple n'est pas exclue.