ESD 2011 – 04 : Optimisation

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

À partir de l'extrait d'un manuel donné ci-contre (Hachette Déclic, édition 2002, exercice 29 page 80), un professeur a proposé à ses élèves l'exercice suivant : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par :

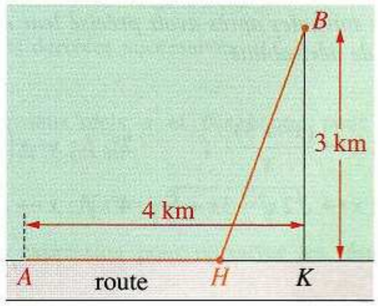
$$f(x)=\frac{x}{40}+\frac{1}{20}\sqrt{x^2-8x+25}$$

1. Expliquez pourquoi la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée.

2. Dressez le tableau de variation de f. Déterminer pour quelle valeur x_0 cette fonction admet un minimum.

3. Donnez les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$

29 ★ Une voiture 4×4 doit aller d'un point A situé sur une route à un point B en traversant un champ.



Sachant que sa vitesse sur la route est de $40\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ et que sa vitesse à travers champ est de $20\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, déterminer la position du point H pour que le temps mis pour aller de A à B soit minimal.

(D'après IREM)

B. Le travail à exposer devant le jury

1. Comparez les compétences développées par les deux versions de l'exercice (professeur/manuel).

2. Citez différents logiciels permettant d'émettre une conjecture sur la solution de l'exercice du manuel et développez la mise en œuvre de l'un d'entre eux.

3. Proposez la correction de la question 2 de l'exercice du professeur comme vous la présenteriez à des élèves.

4. Présentez deux ou trois exercices sur le thème « optimisation ».

2. Eléments de correction

Le manuel propose un problème d'optimisation dans lequel on attend des élèves une modélisation de la situation amenant à l'étude d'une fonction.

Le professeur a choisi quant à lui de faire étudier à ses élèves, de manière complètement décontextualisée, la fonction objectif obtenue lorsqu'on choisit pour paramètre permettant de représenter cette situation la distance $x = AH$ exprimée en km (on peut penser qu'il a résolu lui-même l'exercice du manuel et qu'il a décidé de proposer à ses élèves uniquement la fonction qu'il a utilisée).

Ainsi, la compétence principale requise par l'exercice du manuel est de **savoir modéliser une situation** issue de la géométrie. La fonction f intervient en tant qu'*outil* d'étude.

La compétence principale requise par l'exercice du professeur est de **savoir restituer : mobiliser ses connaissances, appliquer une méthode éprouvée** (en l'occurrence, étudier une fonction comportant des radicaux : la dériver, étudier le signe de sa dérivée, préciser son extremum, ….). La fonction f est un *objet* d'étude. La présence de radicaux ajoute une difficulté notable et nécessite une certaine virtuosité en calcul algébrique (savoir utiliser une expression conjuguée).

(Voir REDCM pages 122 et suivantes sur le thème des fonctions)

D'un point de vue éthique et éco-citoyen, la décision du professeur de censurer la situation présentée par le manuel est très judicieuse, il a correctement « agi en fonctionnaire de l'Etat » : il est inadmissible qu'un 4×4 se permette de traverser un champ, y compris dans un problème de mathématiques.

En revanche, d'un point de vue pédagogique, sa décision paraît calamiteuse. On peut en effet s'interroger sur la pertinence du choix de cette fonction *f*, proposée seule : à quoi sert désormais le coefficient $\frac{1}{40}$? Pourquoi particulièrement l'expression $x^2-8x+25$? Pourquoi l'étudier sur $[0\,;\,4]$? La dérivation et l'étude des variations de *f*, vous l'aurez sans doute constaté si vous avez fait les calculs « à la main », est une activité indigeste et ennuyeuse. Difficile de capter l'attention des élèves en leur fixant pareil objectif …

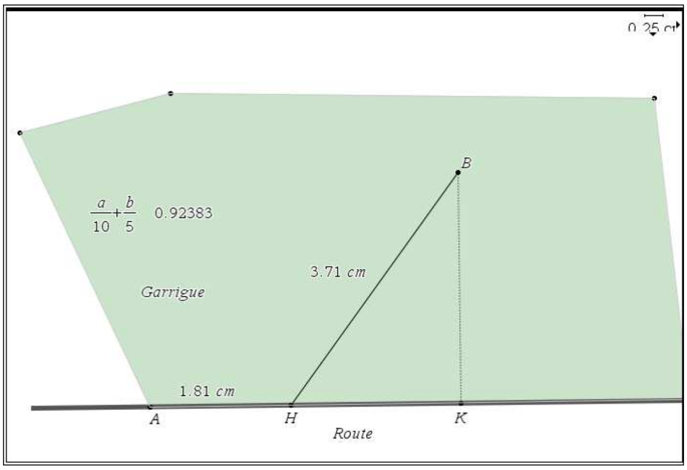
3. Pour aller plus loin

Proposition de modifications[1] :

Divisons par 4 les deux vitesses. Laissons le 4×4 aux cuistres et considérons un coureur de trail : il fait une course d'orientation dans les Corbières, entre Opoul et Périllos, et doit aller de *A* à *B*. Sa vitesse sur route est 10 km.h^{-1} et sa vitesse à travers la garrigue est 5 km.h^{-1}.

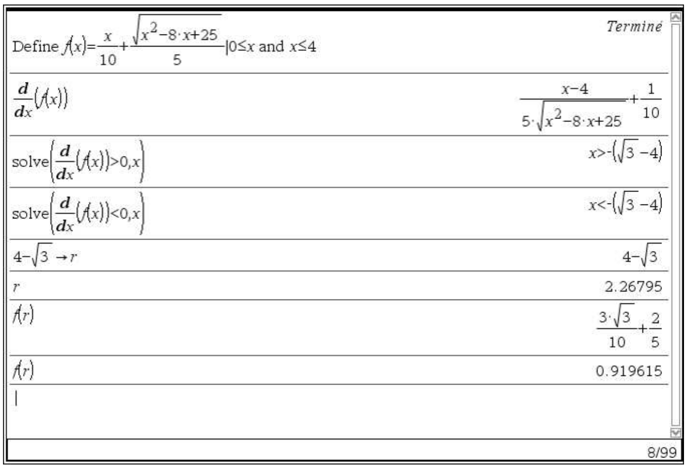
Donnons l'exercice à chercher aux élèves : « Si le coureur va en droite ligne de *A* à *B*, il va mettre exactement une heure. Doit-il choisir cette option ou bien a-t-il intérêt à parcourir une certaine distance sur la route avant de couper par la garrigue ? »

La figure, faite ici avec le logiciel nSpire permet d'émettre des conjectures. Si le coureur traverse la garrigue en droite ligne de *A* à *B*, il met exactement une heure. S'il passe par *K* puis coupe perpendiculairement à la route pour traverser le moins de garrigue possible, il met aussi exactement une heure. S'il coupe en biais à partir d'un point *H* situé entre *A* et *K*, il met moins d'une heure. On peut conjecturer l'existence d'un point *H* optimal.

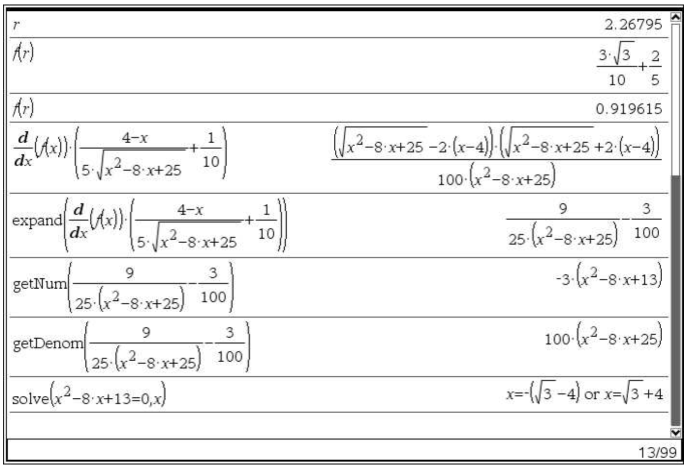


Une première mise en commun devrait permettre de mettre au point une modélisation : en désignant par *x* la distance *AH* exprimée en km, le temps de parcours de *A* à *B* est : $f(x)=\frac{x}{10}+\frac{1}{5}\sqrt{x^2-8x+25}$ où *x* varie dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. « Il faut étudier cette fonction et à déterminer son éventuel minimum sur $[0\,;\,4]$ » Nous voici au point où le professeur a pris l'exercice. La différence est que, maintenant, nous avons *motivé* l'étude des variations.

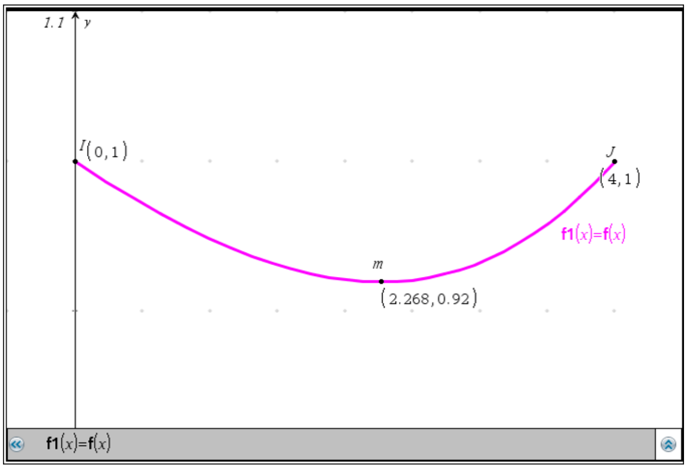
[1] Si vous êtes en pleine préparation de l'oral de du CAPES, ces modifications ne vous concernent pas. Vous avez d'autres chats à fouetter, tenez-vous-en à l'exercice initial, quitte à émettre quelques discrètes réserves sur l'habillage incongru de la situation. Une fois chargé d'une classe, il en va autrement, vous avez pouvez contextualiser à votre guise le contenu mathématique du problème, si possible en choisissant des contextes susceptibles de stimuler l'intérêt de vos élèves.



Le module de calcul formel est requis pour obtenir la valeur de x optimale. L'expression de la dérivée est la même que celle que nous aurions obtenu « à la main », mais elle est incommode dès lors que l'on veut chercher son signe. C'est l'occasion de se demander « comment le logiciel a fait » pour obtenir $4-\sqrt{3}$. Une question se pose à cet instant : « comment étudier le signe d'une expression qui contient un radical ? »



L'usage d'une expression conjuguée, strictement positive sur $[0\ ;\ 4]$, nous donne quelques renseignements : la dérivée de f est du même signe que l'expression du second degré $x^2-8x+13$, expression que s'annule une fois dans l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, pour $x=4-\sqrt{3}$



L'alternative d'une représentation graphique et de son analyse nous permettrait de donner des valeurs approchées arrondies à 10^{-3} de x_0 et de $f(x_0)$

Après avoir corrigé l'exercice, nous pouvons conclure : « L'exercice amène à l'étude d'une fonction contenant des radicaux. Comme vous l'avez constaté, une telle fonction est un peu délicate à étudier. *À titre d'entraînement*, vous allez maintenant étudier deux ou trois autres fonctions[2] de cette famille. ». *La calculatrice n'est pas autorisée pour cette recherche. Vous pourrez l'utiliser quand vous aurez terminé, pour vérifier vos calculs.*

[2] On choisira des fonctions comportant des radicaux plus simples que celle de l'exercice. Il n'y a pas lieu de rechercher une virtuosité calculatoire, mais seulement d'acquérir une technique. On pourra remarquer que des fonctions telles que f présentent aussi un intérêt (comportement asymptotique) si on les définit sur $\mathbb{R}$. Mais ce n'est pas le sujet ici.