# ESD 2011 – 01 : Probabilités

## 1. Le sujet

### Exercice

1. On lance deux dés équilibrés à 6 faces et on note la somme des deux faces obtenues.
1.1. Donner un univers associé à cette expérience.
1.2. A-t-on plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 ? Justifier.

2. On lance maintenant trois dés et on note la somme des faces obtenues. A-t-on autant de chances d'obtenir 9 que 10 ?

### Solution proposée par trois élèves à la question 1.b

**Elève 1.** *Non, on n'a pas plus de chances d'obtenir 6 ou d'obtenir 7 car le lancer de dés est du pur hasard.*
**Elève 2.** *La probabilité de 6 est 3/11. La probabilité de 7 est 3/11. Il y a autant de chance car leur probabilité sont égaux.*
**Elève 3.** *On a pas plus de chance d'obtenir 6 et 7 car pour avoir 6 il faut 1 et 5 ; 2 et 4 ; 3 et 3. Pour 7 il faut 1 et 6 ; 2 et 5 ; 3 et 4. Les issues ont les mêmes probabilités, on parle alors d'une situation d'équiprobabilité.*

### B. Le travail à exposer devant le jury

**1.** Quelles sont les connaissances et les compétences mises en œuvre dans cet exercice ?

**2.** Pour chacun des trois réponses, indiquez le raisonnement que l'élève a pu suivre et l'origine de ses éventuelles erreurs.
**3.** Proposez une correction de la question 2 telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
…

## 2. Eléments de correction

L'exercice proposé a pour objectif de mettre en situation l'importance d'une modélisation correcte et d'un emploi pertinent du langage des probabilités dans la résolution d'un problème. Délibérément semble-t-il, la question posée est mathématiquement incorrecte : « A-t-on plus de chances de … » n'a aucune signification précise. Il conviendra (en synthèse) de reformuler ce type de question de manière à lui donner un sens indiscutable. La « dose de chance » pourra se mesurer en termes de probabilités : « obtenir une somme égale à six » et « obtenir une somme égale à sept » définissent deux évènements de l'univers choisi auxquels on pourra affecter une probabilité ; il faudra déterminer lequel des deux a la plus grande probabilité.

### Questions 1 et 3

*Compétences visées* :
Savoir modéliser : choisir un modèle et travailler avec ce modèle
Savoir communiquer : développer une argumentation et justifier un résultat.

*Connaissances visées* :
Apprendre à passer du langage courant au langage des probabilités, apprendre à exécuter trois étapes déterminantes dans la résolution d'un problème de probabilités, à savoir :

- Construire un univers $\Omega$ de probabilité adapté à la situation.
- Définir la probabilité de chacun des évènements élémentaires constitutifs de $\Omega$.
- Savoir définir un évènement comme une partie de $\Omega$ et en calculer la probabilité par sommation des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

En l'occurrence, dans la question 1, les élèves peuvent choisir un univers composé des 36 couples de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}^2$ (c'est ce qu'ils ont de mieux à faire), univers qu'ils muniront de l'équiprobabilité, ou bien ils peuvent choisir un univers à 21 éléments : « avoir 1 et 1 », « avoir 1 et 2 », … « avoir 6 et 6 ». Mais dans ce cas, il faut qu'ils se rendent compte qu'il n'y a pas équiprobabilité : la probabilité de chacun des 15 évènements élémentaires « avoir *a* et *b* » (*a* et *b* distincts) est deux fois plus grande que la probabilité de chacun des 6 évènements élémentaires « avoir *a* et *a* ». La commodité que l'on gagne en diminuant le nombre d'éléments de $\Omega$, on la perd en distribuant la loi de probabilité.

Dans la question 2, plusieurs stratégies peuvent être mises en œuvre :

Choisir un univers composé des 216 triplets de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}^3$, muni de l'équiprobabilité ; il restera à dénombrer les triplets dont la somme est 9 et ceux dont la somme est 10.

Considérer dans la première question les évènements $A_i$ « obtenir une somme égale à $i$ » ($i$ = 1, …, 12) et calculer leur probabilité puis adjoindre pour la deuxième question un troisième dé, ce qui revient à construire l'univers $\{A_2,..., A_{12}\}\times\{1,...6\}$

**Question 2**

| | Elève 1 | Elève 2 | Elève 3 |
|---|---|---|---|
| Compréhension | Non | Oui | Oui |
| Réalisation | Sans objet | Non | Non |
| Communication | Oui | Non | Oui |

Aucune des productions n'est valide.

**Elève 1.** Cet élève a la notion de ce qu'est une expérience aléatoire (son résultat doit être du « pur hasard ») mais ou bien n'a pas fait la démarche de modéliser l'expérience qu'il avait à étudier (il ne s'est pas posé la question : « y a-t-il des issues prévisibles dont on est certain que l'une, et exactement une, va se produire ? ») ou bien n'a pas fait le lien entre la construction d'un univers et de probabilité et l'usage que l'on pouvait en faire. À sa décharge, comme nous l'avons souligné, l'énoncé de la question **1b** peut l'avoir induit en erreur. Cet élève considère qu'une « chance » n'est pas quantifiable. Il ne s'est engagé dans aucune réflexion mathématique.

**Elève 2.** Il semble que cet élève propose implicitement un univers $\Omega_2$ formé des 11 sommes possibles (de 2 à 12). Il choisit la loi uniforme pour probabiliser son univers. Sa rédaction est insuffisante, il n'y a aucune trace écrite décrivant ou justifiant cette démarche.

**Elève 3.** Cet élève construit un univers $\Omega_3$ formé des 21 paires d'entiers possibles :

$\{1,1\};\{1,2\};\{1,3\};....;\{5,5\};\{5,6\};\{6,6\}$. Il choisit lui aussi la loi uniforme pour probabiliser son univers. Sa rédaction est correcte, il justifie sa réponse en cohérence avec sa représentation.

Ces deux élèves construisent chacun un univers pertinent, mais n'ont pas pris conscience du l'existence possible d'univers où la distribution de probabilité n'était pas uniforme.

L'élève 1 ne possède pas la compétence « modéliser », alors que les deux autres élèves mettent en œuvre cette compétence, mais ils n'ont pas des connaissances suffisantes pour structurer correctement leur modèle.

## 3. Pour aller plus loin

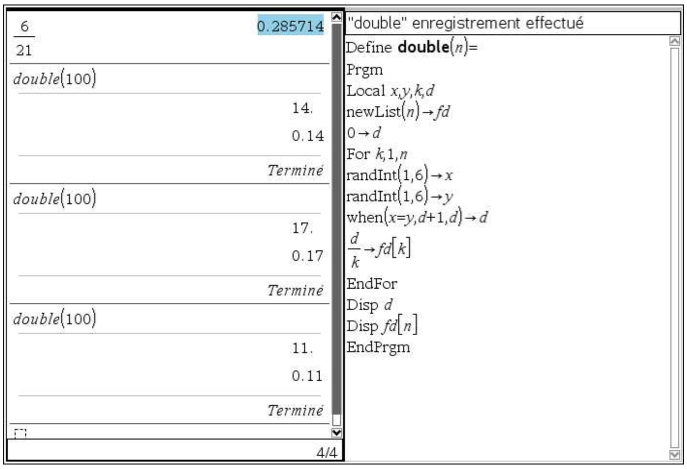
**Exploitations possibles des travaux de ces élèves :**

**Elève 1.** L'enseignant peut utiliser la réponse de cet élève pour faire expliciter à la classe la tâche qui est réellement demandée à la question 1b : que signifie au juste « plus de chances de … » ?

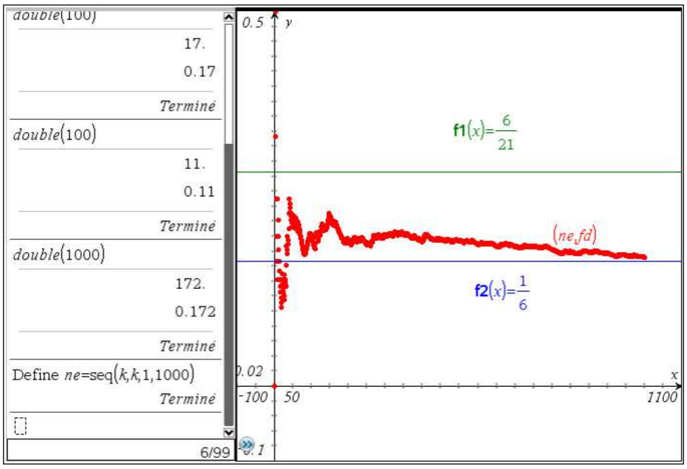
**Elèves 2 et 3.** Il conviendrait de confronter les univers de ces deux élèves. Les modélisations proposées sont contradictoires : la probabilité d'obtenir une somme égale à 2 est 1/11 pour l'un et 1/21 pour l'autre. La confrontation devrait permettre de remettre en cause la réponse de l'élève 2 : la somme 2 est obtenue d'une seule façon et la somme 7 par exemple de plusieurs façons. L'univers $\Omega_2$ n'est certainement pas muni de l'équiprobabilité. Mais cette confrontation ne mettra pas en cause la probabilisation de l'univers $\Omega_3$.

**Mise en cause de l'espace probabilisé $\Omega_3$ avec le logiciel nSpire**

Le programme **double** compte en mémoire **d** le nombre de doubles obtenus au cours de *n* lancers de deux dés. Il dresse la liste **fd** des fréquences de l'évènement D : « les deux dés marquent le même nombre ». Lancé plusieurs fois pour la valeur 100, on note que la fréquence de cet évènement paraît plus faible que sa probabilité théorique selon l'élève 3.




On relance le programme **double** pour $n = 1000$. En parallèle, on représente graphiquement la série des fréquences de l'évènement D, en fonction du nombre d'essais effectués. On observe une stabilisation de cette fréquence à un niveau différent de celui prévu par l'élève 3. En revanche, la réponse correcte 1/6 paraît plus compatible avec l'expérimentation.




En relançant plusieurs fois le programme, on peut observer l'actualisation du graphique. La fréquence de D s'obstine à se stabiliser autour d'une valeur autre que 6/21 ….

(A mon avis, cette simulation suffit à une mise en cause auprès d'une classe intéressée par la question. Pour un jury de CAPES, peut-être non. Il vous reste à justifier plus rigoureusement la réponse en termes de « fourchette »).