Les urnes des époux Ehrenfest : Enoncé de problème et une simulation

Le **modèle d'Ehrenfest** fut défini en 1907 par Paul Ehrenfest, physicien, et son épouse Tatiana Alekseïevna Afanassieva, mathématicienne, pour illustrer certains paradoxes apparaissant dans l'étude théorique du comportement de systèmes physiques comportant un grand nombre de particules.

On considère d'une part deux urnes *A* et *B*, et d'autre part *M* boules, numérotées de 1 à *M*, réparties les unes dans l'urne *A*, les autres dans l'urne *B*.

L'expérience d'Ehrenfest consiste à tirer au hasard un numéro *i* compris entre 1 et *M* et de transférer la boule numéro *i* dans l'urne où elle n'était pas.
Le processus stochastique d'Ehrenfest consiste à discrétiser le temps et de répéter à chaque instant l'expérience d'Ehrenfest. On s'intéresse au nombre de boules présentes dans l'urne *A* à un instant donné appartenant à $\mathbb{N}$.

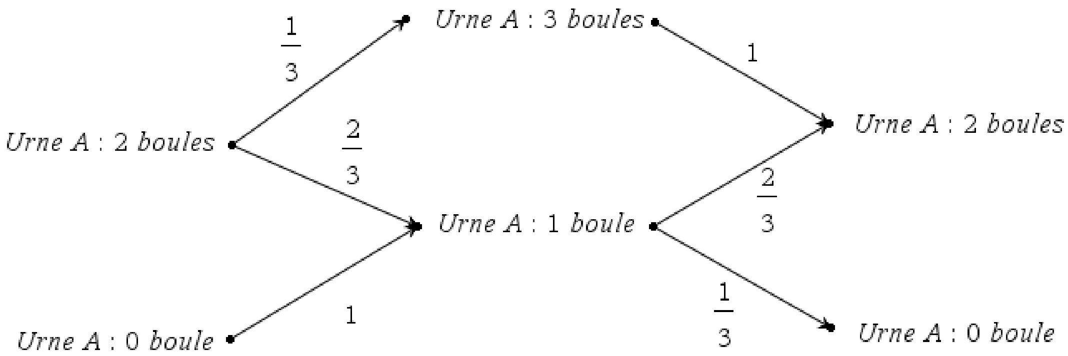
Vous trouverez une étude du cas $M = 2$ dans les documents d'accompagnement des programmes de terminale.
Consultez aussi : http://edutice.archives-ouvertes.fr/docs/00/05/45/65/PDF/co24th2.pdf
Le but de ce problème est d'étudier ce modèle pour les valeurs 3, 4 et 5 de *M*.

On suppose dans tout le problème **qu'au début de l'expérience l'urne *B* contient toutes les boules**.
On remarque que le transfert d'une boule d'une urne dans l'autre change la parité des nombres de boules dans chacune des deux urnes. Aux instants pairs, l'urne *A* contient un nombre pair de boules (puisqu'il n'y en a aucune à l'instant zéro). Plutôt que d'étudier l'évolution du modèle à chaque instant, il sera plus facile d'étudier son évolution aux instants $2n$ d'une part et aux instants $2n+1$ d'autre part.

Vous pouvez utiliser à votre guise un logiciel de calcul formel pour faire aboutir les calculs. C'est même vivement recommandé à partir de la moitié de la partie « M = 4 ».

Le cas *M* = 3.

Aux instants pairs, l'urne *A* contient soit zéro boule (c'est le cas à l'instant zéro) soit deux boules.
On notera a_n (respectivement b_n) la probabilité pour que, à l'instant $2n$, l'urne *A* contienne zéro boule (respectivement deux boules). Ainsi par hypothèse, à l'instant initial : $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
Connaissant les probabilités a_n, b_n à l'instant $2n$, les probabilités a_{n+1}, b_{n+1} à l'instant $2n+2$ s'en déduisent par les formules de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{9}b_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{7}{9}b_n \end{cases}$.



De plus, il s'agit d'une alternative : $a_n + b_n = 1$ pour tout entier naturel *n*. La suite (a_n) est donc définie par son premier terme $a_0 = 1$ et par la relation arithmético-géométrique : $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{9}(1 - a_n) = \frac{1}{9}a_n + \frac{2}{9}$

1. Montrer qu'il existe un réel λ, que l'on précisera, tel que la suite auxiliaire (x_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $x_n = a_n - \lambda$ est une suite géométrique

2. En déduire l'expression de a_n en fonction de *n*, puis celle de b_n.

3. Déterminer en fonction de *n* la probabilité que l'urne *A* contienne exactement une boule (respectivement trois boules) à l'instant $2n + 1$

Retour à l'état initial.

4. On s'intéresse désormais au temps d'attente nécessaire pour observer le premier retour à l'état initial. À cet effet, on définit pour tout entier $n \geq 1$ l'évènement E_n : « à l'instant 2*n*, pour la première fois, l'urne *A* ne contient à nouveau plus aucune boule » et on désigne par p_n la probabilité de cet évènement.
Ainsi par définition : $p_1 = a_1$
On remarque que, si à l'instant 2*n* l'urne *A* ne contient pas de boules, l'urne *A* a pu revenir *pour la première fois* à son état initial à l'un des instants $2n$; $2n - 2$; $2n - 4$ ...; 4 ; 2 de sorte que l'on dispose de la relation de récurrence : $a_n = a_{n-1}p_1 + a_{n-2}p_2 + ...a_1 p_{n-1} + p_n$.

4.1. A l'aide d'une programmation, calculer p_i pour $i = 2, 3, 4, 5$ (voire plus). Conjecturer une formule explicite exprimant p_n en fonction de *n* pour tout entier $n \geq 2$.

4.2. Démontrer cette formule.

4.3. Calculer $\sum_{n \geq 1} p_n$ et interpréter le résultat.

5. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire « temps d'attente du premier retour à l'état initial »

Le cas $M = 4$

On note a_n (respectivement b_n, respectivement c_n) la probabilité pour que, à l'instant $2n$, l'urne A contienne zéro boule (respectivement deux boules, respectivement quatre boules).
Ainsi par hypothèse, à l'instant initial : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1.1. Ecrire des relations de récurrence exprimant les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} à l'instant $2n+2$ en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n à l'instant $2n$.
Que peut-on dire de la probabilité b_n pour tout entier $n \geq 1$?

1.2. Etablir que pour tout entier $n \geq 1$: $a_{n+1} = \dfrac{1}{4} a_n + \dfrac{3}{32}$

1.3. Donner une formule explicite exprimant a_n en fonction de n.

1.4. Vérifier que les termes de la suite (a_n) sont liés, pour tout entier $n \geq 2$, par la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{5}{4} a_n - \dfrac{1}{4} a_{n-1}$

Retour à l'état initial.

2. On reprend les notations et les remarques de la question « Cas $M = 3$, question **4** ». On a maintenant : $p_1 = a_1 = \dfrac{1}{4}$

2.1. A l'aide d'une programmation, calculer p_i pour $i = 2, 3, 4, 5$ (voire plus).

2.2. Déterminer deux nombres réels u et v tels que : $\begin{cases} p_3 = u\, p_2 + v\, p_1 \\ p_4 = u\, p_3 + v\, p_2 \end{cases}$.

2.3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $p_{n+1} = u\, p_n + v\, p_{n-1}$ où u et v sont les deux réels déterminés à la question précédente.

3. Soient r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation $x^2 - u\,x - v = 0$ (on les explicitera). Montrer qu'il existe deux réels λ et μ (on les explicitera ou bien on les exprimera en fonction de r_1, r_2, p_1, p_2) tels que pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = \lambda\, r_1^{\,n-1} + \mu\, r_2^{\,n-1}$

4. Calculer $\sum\limits_{n \geq 1} p_n$ et interpréter le résultat.

5. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire « temps d'attente du premier retour à l'état initial ».

Le cas $M = 5$

On note a_n (respectivement b_n, respectivement c_n) la probabilité pour que, à l'instant $2n$, l'urne A contienne zéro boule (respectivement deux boules, respectivement quatre boules). Ainsi par hypothèse, à l'instant initial : $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 0$.

1. Ecrire des relations de récurrence exprimant les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} à l'instant $2n+2$ en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n à l'instant $2n$.

2.1. On désigne par V_n le vecteur colonne de $\mathbf{R}^3$: $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Ecrire la matrice T de format 3×3 telle que : $V_{n+1} = T\,V_n$

2.2. Ecrire le polynôme caractéristique de T et déterminer ses racines. En déduire que T est diagonalisable.

2.3. Donner une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de T.

2.4. Calculer la matrice T^n et donner une formule explicite exprimant V_n en fonction de n. Vérifier qu'en particulier : $a_n = \frac{1}{16} + \frac{5}{16}\left(\frac{9}{25}\right)^n + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{25}\right)^n$

2.5. Vérifier que les termes de la suite (a_n) sont liés, pour tout entier $n \geq 3$, par la relation de récurrence $a_{n+1} = \frac{7}{5}a_n - \frac{259}{625}a_{n-1} + \frac{9}{625}a_{n-2}$.

Retour à l'état initial

3. On reprend les notations et les remarques de la question « Cas $M = 3$, question **4** ». On a maintenant : $p_1 = a_1 = \frac{1}{5}$

3.1. A l'aide d'une programmation, calculer p_i pour $i = 2, 3, 4, 5, 6$ (voire plus).

3.2. Déterminer deux nombres réels u et v tels que : $\begin{cases} p_4 = u\,p_3 + v\,p_2 \\ p_5 = u\,p_4 + v\,p_3 \end{cases}$.

3.3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 3$, $p_{n+1} = u\,p_n + v\,p_{n-1}$ où u et v sont les deux réels déterminés à la question précédente.

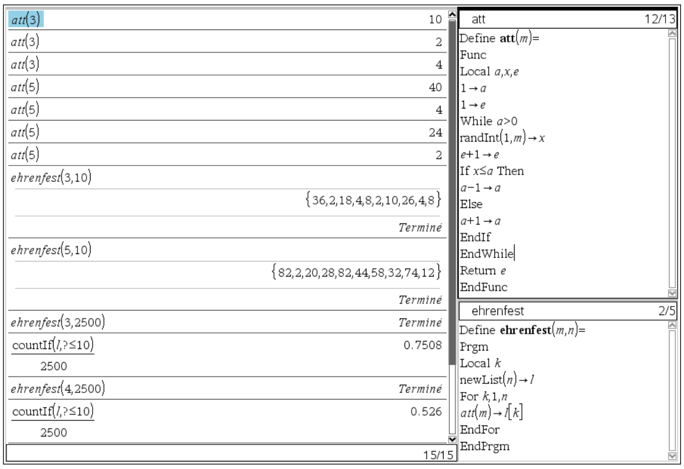
3. Soient r_1 et r_2 les deux solutions de l'équation $x^2 - u\,x - v = 0$ (on les explicitera). Montrer qu'il existe deux réels λ et μ (on les explicitera ou bien on les exprimera en fonction de r_1, r_2, p_2, p_3) tels que pour tout entier $n \geq 2$: $p_n = \lambda\,r_1^{\,n-2} + \mu\,r_2^{\,n-2}$

4. Calculer $\sum_{n\geq 1} p_n$ et interpréter le résultat.

5. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire « temps d'attente du premier retour à l'état initial ».

Une simulation

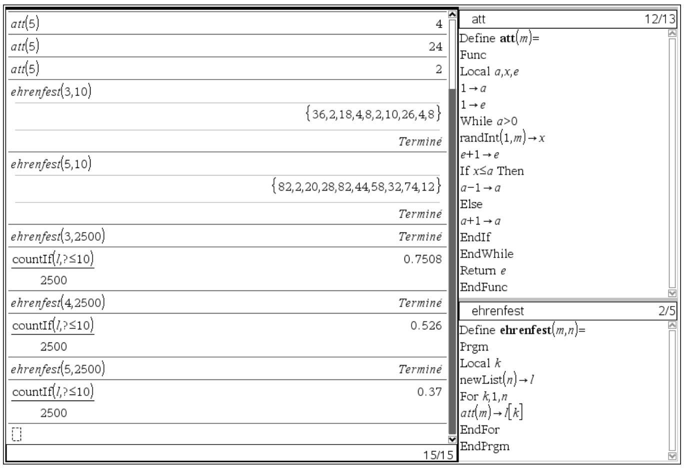
La fonction « **att** », affectée d'un argument m représentant le nombre de boules en jeu simule le temps d'attente du premier retour à l'état initial. Si on suppose que l'urne A est vide à l'instant initial, elle contient nécessairement une boule à l'instant 1. C'est pourquoi on initialise par « $1 \to a$ » la variable « nombre de boules dans l'urne A » à cet instant.



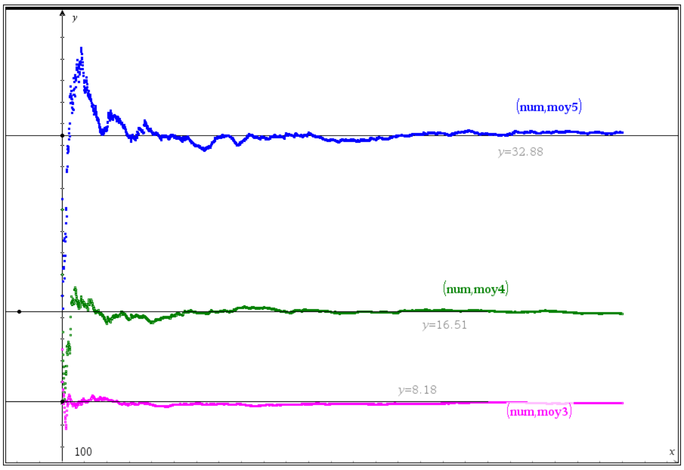
Le programme « **ehrenfest** » exécute n fois la fonction **att** avec m boules en heu. il consigne les résultats obtenus dans la liste **l**.

Ce programme a été exécuté en choisissant $n = 2500$ pour 3 puis 4 puis 5 boules en jeu.

A titre de test, et pour permettre dans une certaine mesure un contrôle des résultats, la fréquence f des temps d'attente inférieurs ou égaux à 10 ont été calculés. En l'occurrence, les fréquences observées ont été 0,7508 puis 0,526 puis 0,37 suivant que m est égal à 3, puis 4 puis 5.



On peut s'attendre au seuil de confiance 0,95 à ce que la somme $\sum_{i=1}^{5} p_i$ soit dans chaque cas dans la fourchette $\left[f - \frac{1}{\sqrt{2500}}, f + \frac{1}{\sqrt{2500}} \right]$ soit $[f - 0{,}02, f + 0{,}02]$



Ce graphique montre l'évolution des temps d'attente moyens au cours de l'expérience précédente. Les trois nuages ont été ajustés empiriquement par des parallèles à l'axe des abscisses, ajustements qui donnent une idée de l'ordre de grandeur des espérances à déterminer.