Les urnes des époux Ehrenfest. Eléments de correction.

Le cas $M = 3$.

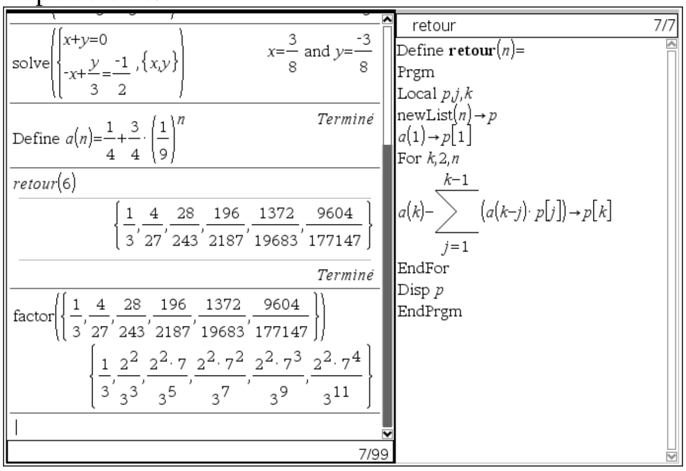
1 et 2. On trouve $\lambda = \frac{1}{4}$ puis $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$ ce qui implique que : $b_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$

3. La probabilité que l'urne A contienne exactement une boule à l'instant $2n+1$ est égale à : $a_n + \frac{2}{3} b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ et exactement trois boules c'est : $\frac{1}{3} b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

4.1. On montre que : $p_1 = \frac{1}{3}$; $p_2 = \frac{4}{27}$; $p_3 = \frac{28}{243}$; $p_4 = \frac{196}{2187}$; $p_5 = \frac{1372}{19683}$.

Rem. On note que : $\sum_{i=1}^{5} p_i \approx 0{,}756$ (à 0,001 près), résultat qui est dans la fourchette prévue par la simulation accompagnant l'énoncé. Les résultats obtenus ici sont plausibles.

Une programmation donne les résultats ci-contre. On est en droit de conjecturer que pour tout entier $n \geq 2$: $p_n = \frac{4}{27} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$, cette relation est vérifiée aux rangs 2, 3 et 4



4.2. Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ il soit vrai que : $p_k = \frac{4}{27} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}$.

L'hypothèse de récurrence revient à supposer que, pour k tel que $2 \leq k \leq n-1$: $p_{k+1} = \frac{7}{9} p_k$

Alors : $p_{n+1} = a_{n+1} - a_n p_1 - a_{n-1} p_2 - \left(\sum_{k=3}^{n} p_k a_{n+1-k}\right) = \left(\frac{1}{9} a_n + \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{3} a_n - \frac{4}{27} a_{n-1} - \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{7}{9} p_{k-1} a_{n+1-k}\right)$

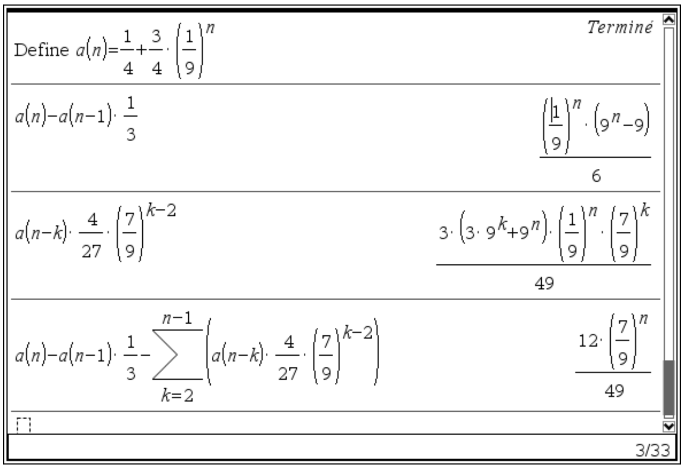
Le « sigma », c'est aussi : $\frac{7}{9} \sum_{j=2}^{n-1} p_j a_{n-j} = \frac{7}{9}\left(p_n - a_n + \frac{1}{3} a_{n-1}\right)$ en changeant d'indexation.

On obtient : $p_{n+1} = \left(-\frac{2}{9} a_n + \frac{2}{9}\right) - \frac{4}{27} a_{n-1} + \frac{7}{9} p_n - \frac{7}{9} a_n + \frac{7}{27} a_{n-1}$ soit aussi :

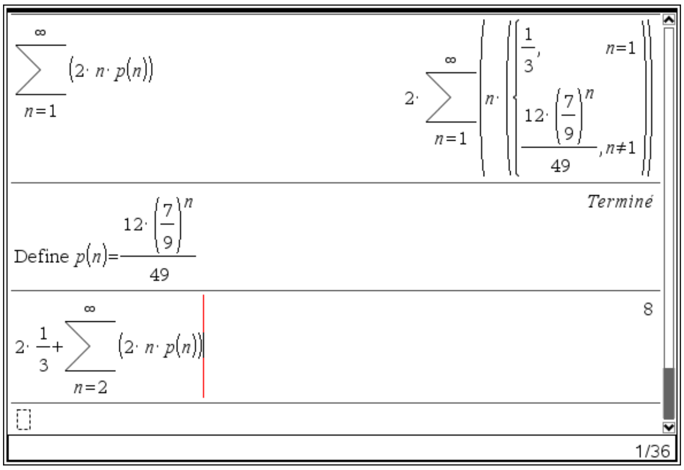
$p_{n+1} = -a_n - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} a_{n-1} + \frac{7}{9} p_n = \frac{7}{9} p_n$ compte tenu de la relation de récurrence associée à la suite (a_n) Si la suite (p_n) est géométrique de son rang 2 jusqu'à son rang n, elle le reste au rang suivant.

Elle l'est donc définitivement à partir de son rang 2.

Le logiciel de calcul formel obtient d'ailleurs l'expression $p_n = \frac{12}{49}\left(\frac{7}{9}\right)^n = \frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$ si on lui fait calculer $a_n - a_{n-1}p_1 - \left(a_{n-2}p_2 + ... + a_1 p_{n-1}\right)$ en tenant compte de l'hypothèse de récurrence.



4.3. $\sum_{n\ge 1} p_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\sum_{n\ge 2}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\frac{1}{1-\frac{7}{9}} = 1$. Il est quasi certain que, à un instant ou à un autre, l'urne retrouvera son état initial.



5. L'espérance du premier retour à l'état initial est : $\sum_{n\ge 1} 2n\, p_n = \frac{2}{3} + \sum_{n\ge 2} 2n \times \frac{4}{27} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$. Le logiciel de calcul formel affiche 8.

On peut aussi considérer la série entière de référence : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + .. = \sum_{n\ge 0} x^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1. A l'intérieur du disque de convergence, la série entière dérivée est égale à la dérivée de sa somme : $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + .. = \sum_{n\ge 1} n\, x^{n-1}$. Il en résulte que : $\sum_{n\ge 2} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$.

Appliquée au cas qui nous concerne, cette formule donne :

$$\sum_{n\ge 1} 2n\, p_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{27} \times \sum_{n\ge 2} 2n \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} = \frac{2}{3} + \frac{8}{21} \times \sum_{n\ge 2} n\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{8}{21} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{7}{9}\right)^2} - 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{22}{3} = 8$$

Le cas M = 4.

1. 1. On aboutit aux relations de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{8}b_n \\ b_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{3}{4}c_n = \dfrac{3}{4} \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{8}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \end{cases}$.

On constate qu'à tout instant pair autre que l'instant initial, la probabilité que les deux urnes contiennent chacune deux boules est toujours égale à 3/4. Il en résulte que pour tout entier $n \geq 1$: $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{3}{32}$

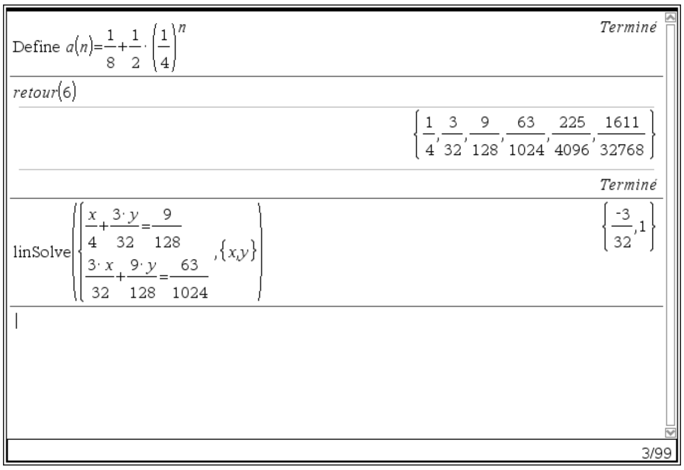
1.2 et 1.3. La suite (a_n) est arithmético-géométrique de point fixe $\dfrac{1}{8}$. La suite $\left(a_n - \dfrac{1}{8}\right)$ est une suite géométrique de premier terme $a_1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$ et de raison $\dfrac{1}{4}$. On obtient : $a_n = \dfrac{1}{8}\left(1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

1.4. Vu que la suite (b_n) est une suite constante à partir du rang 1, on peut écrire pour tout entier $n \geq 2$:

$a_{n+1} - \dfrac{1}{4}a_n = \dfrac{1}{8}b_n = \dfrac{1}{8}b_{n-1} = a_n - \dfrac{1}{4}a_{n-1}$ soit : $a_{n+1} = \dfrac{5}{4}a_n - \dfrac{1}{4}a_{n-1}$

2. Le programme « **retour** » renvoie les six premiers termes de la suite (p_n).

Rem. On note que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} p_i \approx 0{,}531$ (à 0,001 près), résultat qui est dans la fourchette prévue par la simulation. Les résultats obtenus ici sont plausibles.



On doit résoudre : $\begin{cases} \dfrac{9}{128} = \dfrac{u}{4} + \dfrac{3v}{32} \\ \dfrac{63}{1024} = \dfrac{3u}{32} + \dfrac{9v}{128} \end{cases}$

Il apparaît que les nombres u et v cherchés sont $u = 1$; $v = -\dfrac{3}{32}$: $\begin{cases} p_3 = p_2 - \dfrac{3}{32}p_1 \\ p_4 = p_3 - \dfrac{3}{32}p_2 \end{cases}$

La relation $p_{n+1} = p_n - \dfrac{3}{32}p_{n-1}$ » est vérifiée par construction aux rangs 2 et 3.

Supposons que cette relation soit vérifiée pour tous les rangs depuis le rang 2 jusqu'au rang $n-1$ (où n est un entier au moins égal à 3)

De la relation $p_{n+1} = a_{n+1} - (a_n p_1 + a_{n-1} p_2 + ... a_1 p_n)$ on déduit, en appliquant d'une part la formule de récurrence sur a_{n+1} et d'autre part l'hypothèse de récurrence sur les p_i :

$$p_{n+1} = \left(\frac{5}{4}a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}\right) - a_n p_1 - a_{n-1}p_2 - a_{n-2}\left(p_2 - \frac{3}{32}p_1\right) - a_{n-3}\left(p_3 - \frac{3}{32}p_2\right)... - a_1\left(p_{n-1} - \frac{3}{32}p_{n-2}\right)$$

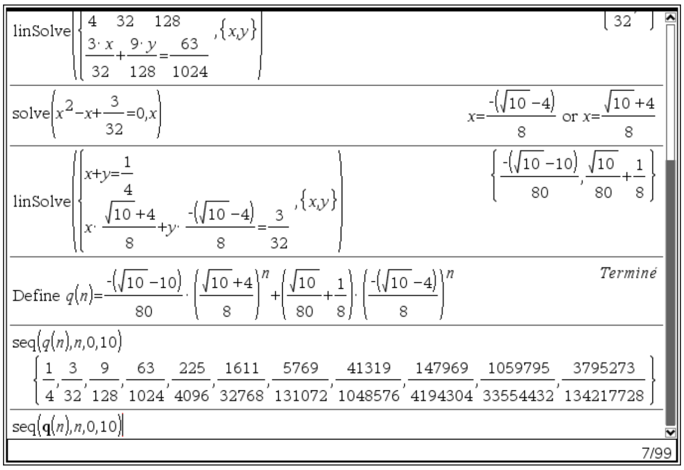
Or : $p_1 = \frac{1}{4}$ donc $\frac{5}{4}a_n - a_n p_1 = a_n$ et $p_2 = \frac{3}{32}$. La relation peut s'écrire en la réarrangeant :

$$p_{n+1} = (a_n - p_1 a_{n-1} - p_2 a_{n-2} - ... - a_1 p_{n-1}) - \frac{3}{32}(a_{n-1} - p_1 a_{n-2} - ... - a_1 p_{n-2})$$

C'est-à-dire : $p_{n+1} = p_n - \frac{3}{32}p_{n-1}$. Il y a bien hérédité, la relation est encore vérifiée au rang n.

Pour tout entier $n \geq 2$: $p_{n+1} = p_n - \frac{3}{32}p_{n-1}$

3. L'ensemble S des suites réelles $(p_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 2$ la relation de récurrence $p_{n+1} = p_n - \frac{3}{32}p_{n-1}$ a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 (la donnée des deux termes p_1 et p_2 détermine la totalité de la suite). L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire double est l'équation : $x^2 - x + \frac{3}{32} = 0$, qui a pour racines les nombres : $r_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{8}$ et $r_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{8}$, tous deux compris entre 0 et 1.

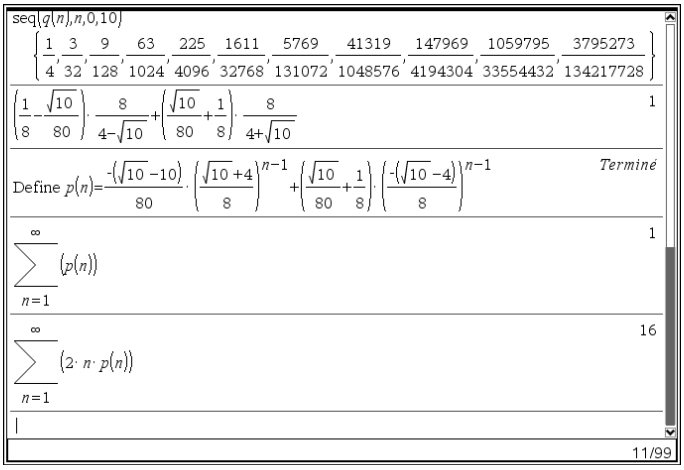


Ainsi, S admet pour base les deux suites $(r_1^{\,n-1})$ et $(r_2^{\,n-1})$ (l'indexation commence avec l'entier 1). Le calcul des deux réels λ et μ solutions du système : $\begin{cases} p_1 = \lambda + \mu \\ p_2 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$, en l'occurrence : $\lambda = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{10}}{80}$; $\mu = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{10}}{80}$ détermine les coordonnées de la suite (p_n) dans la base $(r_1^{\,n-1})$ et $(r_2^{\,n-1})$. On obtient la formule explicite :

$$\boxed{p_n = \left(\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{10}}{80}\right)\left(\frac{4+\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1} \underset{G.\,Julia}{} + \underset{29/12/2012}{} \left(\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{10}}{80}\right)\left(\frac{4-\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1}}$$

. On peut vérifier que l'expression des premières probabilités coïncide, qu'on les calcule par une programmation ou qu'on les calcule par cette formule explicite.

4 et 5. Le logiciel de calcul formel affiche $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$. Il est quasi certain que, à un instant ou à un autre, l'urne retrouvera son état initial. Il affiche aussi à propos de l'espérance : $\sum_{n\geq 1} 2n\, p_n = 16$.



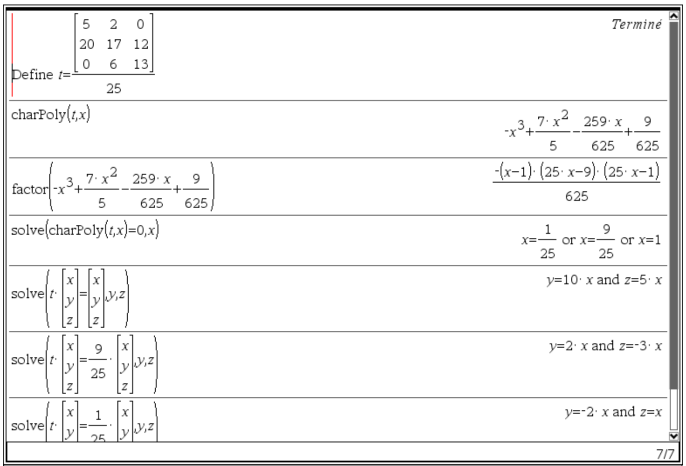
4 et 5 « à la main ». $\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{10}}{80}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4+\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{10}}{80}\right)\frac{1}{1-\frac{4+\sqrt{10}}{8}} = \frac{5+\sqrt{10}}{10}$ et de même :

$\left(\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{10}}{80}\right)\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4-\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1} = \frac{5-\sqrt{10}}{10}$. La somme de ces deux nombres est $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$.

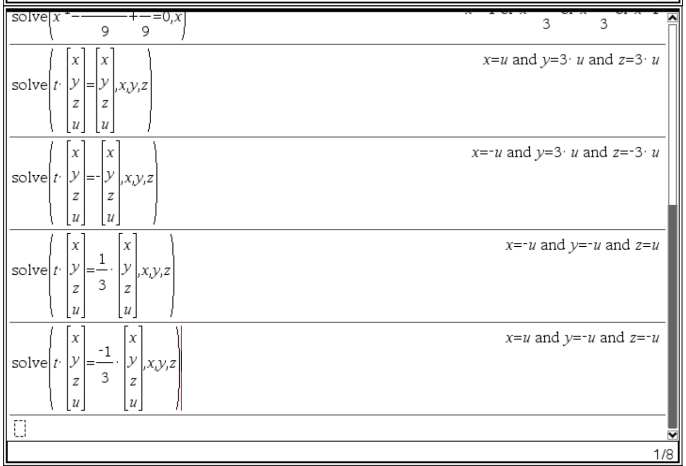
Quant à l'espérance : $\left(\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{10}}{80}\right)\sum_{n\geq 1} 2n\left(\frac{4+\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{10}}{40}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{4+\sqrt{10}}{8}\right)^2}\right) = 8+\frac{12\sqrt{10}}{5}$ et de même : $\left(\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{10}}{80}\right)\sum_{n\geq 1} 2n\left(\frac{4-\sqrt{10}}{8}\right)^{n-1} = 8-\frac{12\sqrt{10}}{5}$. En conséquence : $\sum_{n\geq 1} 2n\, p_n = 16$

Le cas *M* = 5

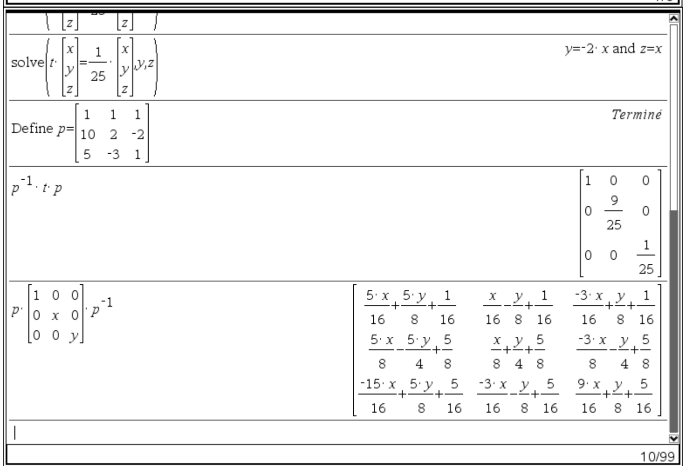
1. $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{25}b_n \\ b_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{17}{25}b_n + \frac{12}{25}c_n \\ c_{n+1} = \frac{6}{25}b_n + \frac{13}{25}c_n \end{cases}$. La matrice de transition est : $T = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 20 & 17 & 12 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}$:



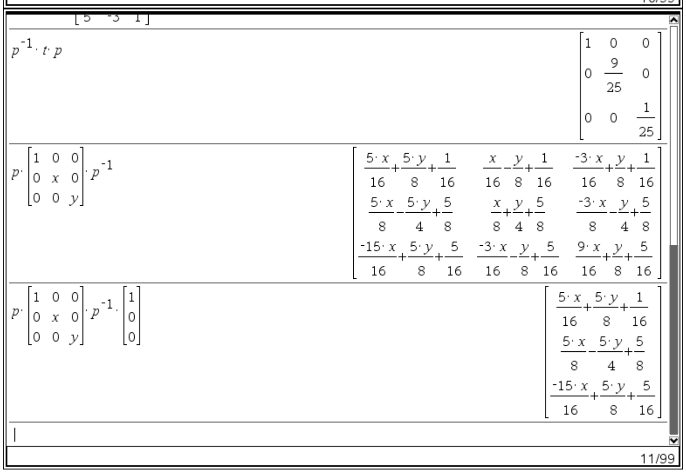
2. Le polynôme caractéristique de T admet trois racines réelles distinctes. Toutes les racines sont simples, il s'ensuit que les sous-espaces propres associés sont nécessairement trois droites vectorielles. T est une matrice diagonalisable.
Ses valeurs propres sont 1, 9/25 et 1/25.



2.2. On peut choisir comme base de vecteurs propres les vecteurs colonnes qui figurent dans la matrice : $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 10 & 2 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$ respectivement associés aux valeurs propres 1, 9/25 et 1/25.



2.3. En ce qui concerne le calcul de T^n, le logiciel nSpire ne semble pas savoir calculer avec 9/25 et 1/25 élevés à la puissance n. On contourne la difficulté en désignant par x et y ces puissances.



2.4. L'expression du vecteur V_n s'en déduit par la relation : $V_n = T^n V_0$.
On obtient :

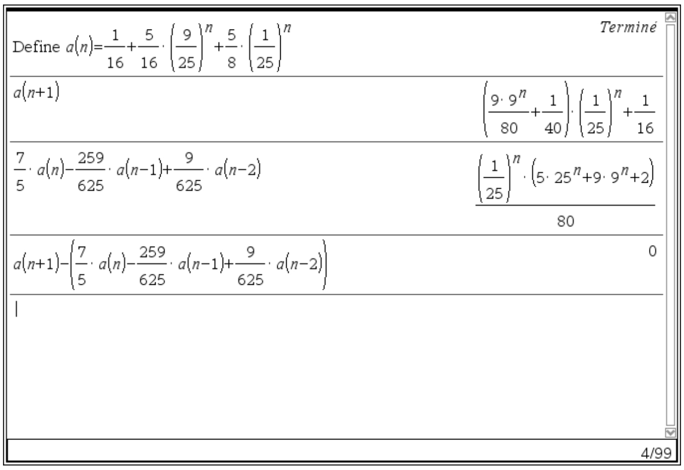
$$V_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}1+5\left(\frac{9}{25}\right)^n+10\left(\frac{1}{25}\right)^n\\ 10+10\left(\frac{9}{25}\right)^n-20\left(\frac{1}{25}\right)^n\\ 5-15\left(\frac{9}{25}\right)^n+10\left(\frac{1}{25}\right)^n\end{pmatrix}$$

En particulier, la probabilité que l'urne A retourne à son état initial à l'instant $2n$ est $a_n = \frac{1}{16} + \frac{5}{16}\left(\frac{9}{25}\right)^n + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{25}\right)^n$.

2.5. Le calcul explicite à l'aide du logiciel de calcul formel de $a_{n+1} - \left(\frac{7}{5}a_n - \frac{259}{625}a_{n-1} + \frac{9}{625}a_{n-2}\right)$, légitime pour tout entier $n \geq 3$, montre que : $a_{n+1} - \left(\frac{7}{5}a_n - \frac{259}{625}a_{n-1} + \frac{9}{625}a_{n-2}\right) = 0$.

Ainsi, pour tout entier $n \geq 3$:

$$a_{n+1} = \frac{7}{5}a_n - \frac{259}{625}a_{n-1} + \frac{9}{625}a_{n-2}$$



2.5 « à la main ». On peut partir du système des trois relations de récurrence de la question 1. Des deux premières, on peut déduire : $\begin{cases} 25a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \\ 50b_n = 40a_{n-1} + 34b_{n-1} + 24c_{n-1} \end{cases}$ puis :

$\begin{cases} 25a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \\ 25(25a_{n+1} - 5a_n) = 40a_{n-1} + 17(25a_n - 5a_{n-1}) + 24c_{n-1} \end{cases}$ ce qui induit : $625a_{n+1} = 550a_n - 45a_{n-1} + 24c_{n-1}$

La troisième relation peut s'écrire : $24c_{n-1} = \frac{72}{25}\times 2b_{n-2} + \frac{13}{25}\times 24c_{n-2}$, ce qui donne :

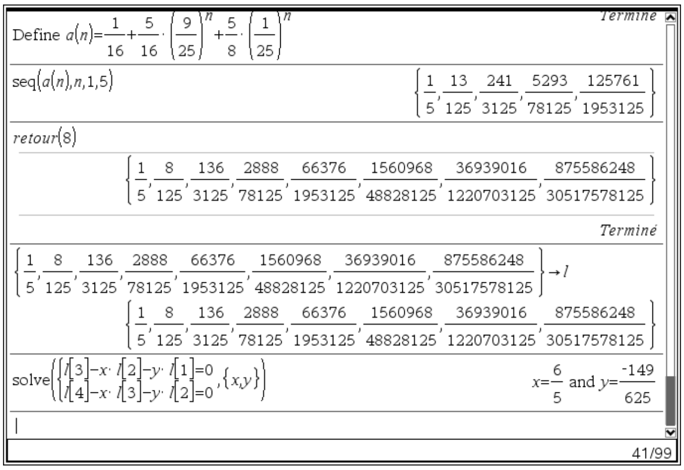
$$(625a_{n+1} - 550a_n + 45a_{n-1}) = \frac{72}{25}\times(25a_{n-1} - 5a_{n-2}) + \frac{13}{25}\times(625a_n - 550a_{n-1} + 45a_{n-2})$$

Soit : $625a_{n+1} = 875a_n - 259a_{n-1} + 9a_{n-2}$

3. On note que : $\sum_{i=1}^{5} p_i \approx 0{,}378$ (à 0,001 près), résultat qui est dans la fourchette prévue par la simulation. Les résultats obtenus ici sont plausibles.

3.2. La résolution du système d'équations $\begin{cases} p_4 = x\,p_3 + y\,p_2 \\ p_5 = x\,p_4 + y\,p_3 \end{cases}$ amène au couple solution $x = \frac{6}{5}$; $y = -\frac{149}{625}$

La relation : $p_{n+1} = \frac{6}{5}p_n - \frac{149}{625}p_{n-1}$ (1) est vérifiée par construction aux rangs 3 et 4.



Soit $n \geq 5$. Supposons que la relation (1) soit vérifiée à tous les rangs depuis le rang 3 jusqu'au rang $n-1$.

$$p_{n+1} = a_{n+1} - p_1 a_n - p_2 a_{n-1} - p_3 a_{n-2} - \sum_{k=4}^{n} p_k a_{n+1-k}$$

$$p_n = a_n - p_1 a_{n-1} - p_2 a_{n-2} - \sum_{k=4}^{n} p_{k-1} a_{n+1-k} \quad ; \quad p_{n-1} = a_{n-1} - p_1 a_{n-2} - \sum_{k=4}^{n} p_{k-2} a_{n+1-k}$$

Si l'on calcule l'expression $p_{n+1} - \frac{6}{5} p_n + \frac{149}{625} p_{n-1}$, en tenant compte de l'hypothèse de récurrence les trois « sigma » en présence s'annulent. Il reste :

$$p_{n+1} - \frac{6}{5} p_n + \frac{149}{625} p_{n-1} = a_{n+1} - \left(p_1 + \frac{6}{5} \right) a_n - \left(p_2 - \frac{6}{5} p_1 - \frac{149}{625} \right) a_{n-1} - \left(p_3 - \frac{6}{5} p_2 + \frac{149}{625} p_1 \right) a_{n-2}$$

Or : $p_1 + \frac{6}{5} = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} = \frac{7}{5}$; $p_2 - \frac{6}{5} p_1 - \frac{149}{625} = \frac{8}{125} - \frac{6}{25} - \frac{149}{625} = -\frac{259}{625}$ et :

$$p_3 - \frac{6}{5} p_2 + \frac{149}{625} p_1 = \frac{136}{3125} - \frac{48}{625} + \frac{149}{3125} = \frac{9}{625}$$

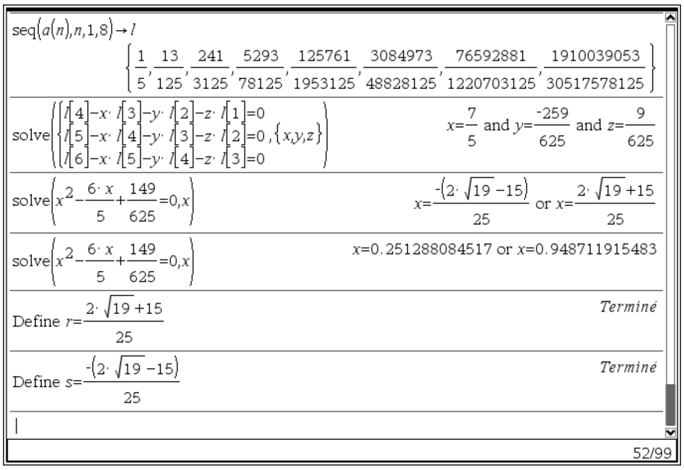
On obtient : $p_{n+1} - \frac{6}{5} p_n + \frac{149}{625} p_{n-1} = a_{n+1} - \frac{7}{5} a_n + \frac{259}{625} a_{n-1} - \frac{9}{625} a_{n-2} = 0$ compte tenu de la relation de récurrence établie entre les termes de la suite (a_n)

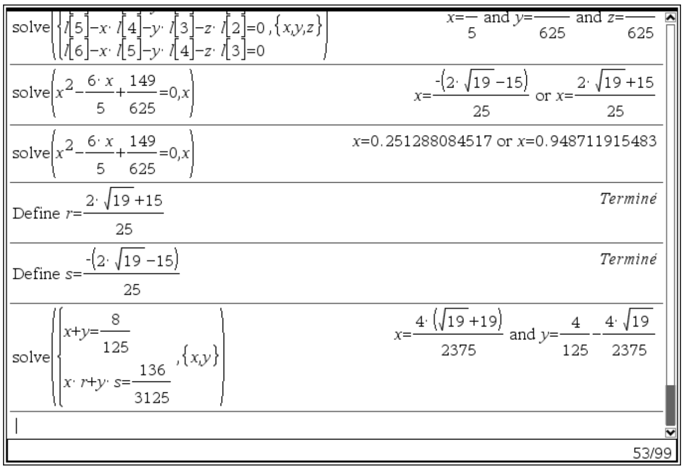
La relation (1) est encore vérifiée au rang n. Elle est donc vérifiée pour tout entier $n \geq 3$.

3.3. La suite $(p_n)_{n\geq 2}$ appartient à l'ensemble S des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ dont les termes sont liés par la relation de récurrence double (1).

L'équation caractéristique associée à cette relation est l'équation $x^2 - \frac{6}{5} x + \frac{149}{625} = 0$, équation qui a deux solutions réelles, $r_1 = \frac{15 + 2\sqrt{19}}{25}$ et $r_2 = \frac{15 - 2\sqrt{19}}{25}$, toutes deux comprises entre 0 et 1.

S est un espace vectoriel de dimension 2, engendré par les suites $\left(r_1^{\,n-2}\right)$ et $\left(r_2^{\,n-2}\right)$ des puissances de ces deux nombres.

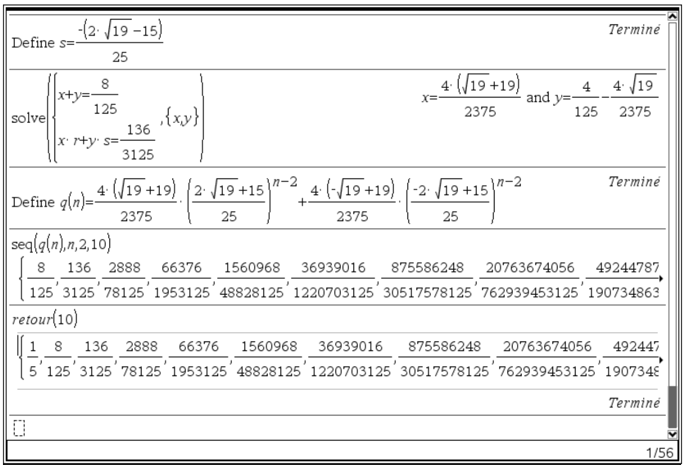




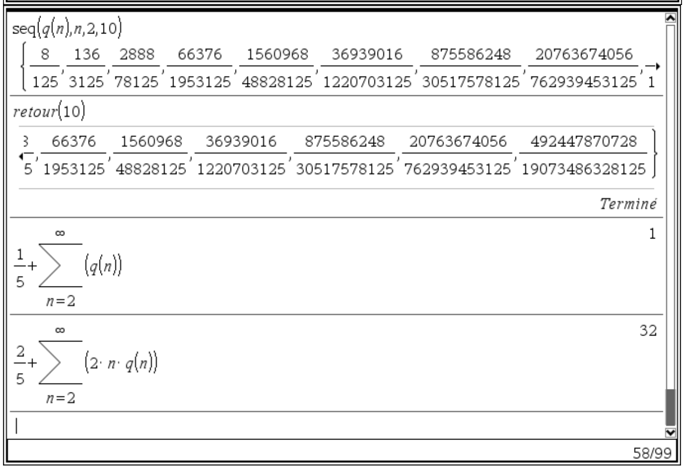
La résolution du système $\begin{cases} x + y = p_2 \\ x r_1 + y r_2 = p_3 \end{cases}$ fournit les coordonnées de la suite $(p_n)_{n\geq 2}$ dans cette base.

Cette suite est ainsi déterminée à partir de son terme de rang 2.

On aboutit à la formule : $$\boxed{p_n = \frac{4\left(19+\sqrt{19}\right)}{2375}\left(\frac{15+2\sqrt{19}}{25}\right)^{n-2} + \frac{4\left(19-\sqrt{19}\right)}{2375}\left(\frac{15-2\sqrt{19}}{25}\right)^{n-2}}$$



A titre de vérification, on peut noter la coïncidence dès le rang 2 entre la liste des premiers p_i donnée par la formule et celle donnée par la programmation.



4 et 5. En faisant calculer la somme de tous les p_i par un logiciel de calcul formel, on obtient 1, le retour à l'état initial est quasi-certain.
L'espérance mathématique du premier retour à l'état initial est quant à elle égale à 32.

4 et 5 « à la main ». On peut remarquer que les coordonnées de $(p_n)_{n\geq 2}$ sont $x=\dfrac{r_2 p_2 - p_3}{r_2 - r_1}$; $y=\dfrac{p_3 - p_2 r_1}{r_2 - r_1}$ et en conséquence : $p_n=\dfrac{r_2 p_2 - p_3}{r_2 - r_1} r_1^{\,n-2} + \dfrac{p_3 - p_2 r_1}{r_2 - r_1} r_2^{\,n-2}$

La somme des probabilités peut se calculer à l'aide de la somme et du produit des racines du polynôme $f(x)=x^2-\dfrac{6}{5}x+\dfrac{149}{625}$:

$$\sum_{n\geq 2} p_n = \frac{r_2 p_2 - p_3}{r_2 - r_1}\frac{1}{1-r_1} + \frac{p_3 - p_2 r_1}{r_2 - r_1}\frac{1}{1-r_2} = \frac{p_2+p_3-p_2(r_1+r_2)}{(1-r_1)(1-r_2)} = \frac{p_2+p_3-p_2(r_1+r_2)}{1-(r_1+r_2)+r_1 r_2}$$ ce qui donne :

$$\sum_{n\geq 2} p_n = \frac{p_2+p_3-\frac{6}{5}p_2}{1-\frac{6}{5}+\frac{149}{625}} = \frac{125(5p_3-p_2)}{24}.$$

Finalement : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p_n = p_1 + \frac{125(5p_3-p_2)}{24} = \frac{1}{5} + \frac{125\left(\frac{136}{625}-\frac{8}{125}\right)}{24} = \frac{1}{5}+\frac{4}{5} = 1$

Quant à l'espérance :

$$\sum_{n\geq 2} 2n\, p_n = \frac{r_2 p_2 - p_3}{r_2 - r_1}\sum_{n\geq 2} 2n\, r_1^{\,n-2} + \frac{p_3 - p_2 r_1}{r_2 - r_1}\sum_{n\geq 2} 2n\, r_2^{\,n-2}$$

Or : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\, x^{n-2} = \sum_{n\geq 1}(n+1)x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} x^{n-1}$ en décalant l'indexation ce qui donne :

$\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\, x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2-x}{(1-x)^2}$. Ici : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n\, p_n = \frac{r_2 p_2 - p_3}{r_2 - r_1}\frac{2-r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{p_3 - p_2 r_1}{r_2 - r_1}\frac{2-r_2}{(1-r_2)^2}$.

On obtient : $\sum_{n\geq 2} n\, p_n = \dfrac{p_2\left(2(r_1+r_2)^2 - r_1 r_2 (r_1+r_2) - 4(r_1+r_2)+2\right) + p_3\left(r_1 r_2 - 2(r_1+r_2)+3\right)}{\left(1-(r_1+r_2)+r_1 r_2\right)^2}$

Soit : $\sum_{n\geq 2} n\, p_n = \dfrac{\dfrac{8}{125}\left(2.\dfrac{36}{25} - \dfrac{149}{625}.\dfrac{6}{5} - 4.\dfrac{6}{5}+2\right) + \dfrac{136}{3125}\left(\dfrac{149}{625} - 2.\dfrac{6}{5}+3\right)}{\left(1-\dfrac{6}{5}+\dfrac{149}{625}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{45504}{1953125}}{\left(1-\dfrac{6}{5}+\dfrac{149}{625}\right)^2} = \dfrac{79}{5}$

L'espérance est : $\sum_{n\geq 1} 2n\, p_n = \dfrac{2}{5} + 2.\dfrac{79}{5} = 32$