Suites d'Eden: Enoncé.

Il ne s'agit pas de suites bucoliquement paradisiaques, mais de suites évoquées par le mathématicien américain Murray Eden (probablement à l'est). Ce problème est inspiré d'un sujet du concours Euclide 2012 organisé par le Centre d'Education en Mathématique et en Informatique de l'Université de Waterloo (Canada) : http://www.cemc.uwaterloo.ca/index-f.html

Ce problème est à traiter en application des suites de Fibonacci.

On se donne un entier n strictement positif. On appelle *suite d'Eden* sur l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ des entiers consécutifs de 1 à n toute suite s d'entiers qui satisfait aux conditions suivantes :

- Chacun des termes de s est un élément de $\{1, 2, ..., n\}$
- La suite s est croissante
- Les termes de rangs pairs sont des nombres pairs et les termes de rangs impairs sont des nombres impairs.

On note :
E_n l'ensemble des suites d'Eden sur $\{1, 2, ..., n\}$ et e_n le cardinal de cet ensemble.
P_n l'ensemble des suites d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n\}$ et p_n le cardinal de cet ensemble.
I_n l'ensemble des suites d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n\}$ et i_n le cardinal de cet ensemble.

Par exemple :
Il existe quatre suites d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ qui sont : $(1);(3);(1,2);(1,2,3)$.
Ainsi : $p_3 = 1$; $i_3 = 3$; $e_3 = 4 = p_3 + i_3$
Il existe sept suites d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ qui sont : $(1);(3);(1,2);(1,4);(3,4);(1,2,3);(1,2,3,4)$
Ainsi : $p_4 = 4$; $i_4 = 3$; $e_4 = 7 = p_4 + i_4$

1. Déterminer toutes les suites d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. 1. On suppose que n est un entier pair : $n = 2k$.

Justifier les relations : $\begin{cases} p_{2k+1} = p_{2k} \\ i_{2k+1} = i_{2k} + p_{2k} + 1 \end{cases}$

2. 2. On suppose que n est un entier impair : $n = 2k - 1$.

Justifier les relations : $\begin{cases} p_{2k} = p_{2k-1} + i_{2k-1} \\ i_{2k} = i_{2k-1} \end{cases}$

2.3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$: $e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + 1$

3. A l'aide d'une calculatrice, déterminer e_{20}.

4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $f_n = e_n + a$. Montrer que l'on peut choisir a de sorte que la suite (f_n) soit une suite de Fibonacci. Utiliser alors cette suite auxiliaire pour exprimer explicitement e_n en fonction de n.