Suites d'Eden: Eléments de correction

1. Les sept suites d'Eden sur $\{1, 2, 3, 4\}$ sont aussi des suites d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
On obtient une nouvelle suite d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en prolongeant par 5 les suites de longueur paire sur $\{1, 2, 3, 4\}$, ce qui donne les suites $(1,2,5);(1,4,5);(3,4,5)$; $(1,2,3,4,5)$ et en considérant une nouvelle suite de longueur 1 : (5). On obtient 12 suites d'Eden sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, et $p_5 = 4$; $i_5 = 8$

2.1. On suppose n pair $n = 2k$: Toute suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n\}$ est aussi une suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n, n+1\}$. Réciproquement, l'entier $n+1$ étant par hypothèse le nombre impair $n+1 = 2k+1$, toute suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n, n+1\}$ se termine par un nombre pair < $n+1$, c'est aussi une suite d'Eden sur $\{1, 2, ..., n\}$. Les suites d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., n\}$ et sur $\{1, 2, ..., n, n+1\}$ sont les mêmes. Ainsi : $P_{2k+1} = P_{2k}$ et donc $p_{2k+1} = p_{2k}$
Soit une suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k, 2k+1\}$.
Ou bien elle se termine par $2k+1$. S'il ne s'agit pas de la suite de longueur 1 : $(2k+1)$, cette suite est une suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., 2k\}$ prolongée par $2k+1$.
Ou bien elle ne se termine pas par $2k+1$ (donc par un nombre impair plus petit) et alors elle est une suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k\}$.
On réalise ainsi une partition de I_{2k+1} en trois sous ensembles : I_{2k}, un ensemble équipotent à P_{2k} et le singleton $\{(2k+1)\}$. Par conséquent : $i_{2k+1} = i_{2k} + p_{2k} + 1$

2.2. On suppose n impair $n = 2k-1$. L'entier suivant est $n+1 = 2k$. Toute suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k-1\}$ est aussi une suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k-1, 2k\}$. Réciproquement, toute suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k-1, 2k\}$ se termine par un nombre impair < $n+1$, c'est aussi une suite d'Eden sur $\{1, 2, ..., n\}$. Les suites d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., n\}$ et sur $\{1, 2, ..., n, n+1\}$ sont les mêmes. Ainsi : $I_{2k+1} = I_{2k}$ et donc $i_{2k+1} = i_{2k}$

Soit une suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., 2k-1, 2k\}$. Une telle suite est composée d'au moins deux nombres.
Ou bien elle se termine par $2k$. Cette suite est une suite d'Eden de longueur impaire sur $\{1, 2, ..., 2k-1\}$ prolongée par $2k$.
Ou bien elle ne se termine pas par $2k$ (donc par un nombre pair plus petit) et alors elle est une suite d'Eden de longueur paire sur $\{1, 2, ..., 2k-1\}$.
On réalise ainsi une partition de P_{2k} en deux sous ensembles : P_{2k-1} et un ensemble équipotent à I_{2k-1}. Par conséquent : $p_{2k} = i_{2k-1} + p_{2k-1}$

2.3. Supposons n pair : $n = 2k$.
Alors : $e_{2k+1} = p_{2k+1} + i_{2k+1} = p_{2k} + (p_{2k} + i_{2k} + 1) = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + (p_{2k} + i_{2k} + 1) = e_{2k-1} + e_{2k} + 1$

Supposons n impair : $n = 2k-1$ (avec $k \geq 2$)
Alors : $e_{2k} = p_{2k} + i_{2k} = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + i_{2k-1} = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + (p_{2k-2} + i_{2k-2} + 1) = e_{2k-1} + e_{2k-2} + 1$

Quelle que soit la parité de l'entier n, on obtient la relation : $e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + 1$

3. La construction de la suite (e_n) montre que l'on a : $e_{20} = 17710$

4. $(f_{n+1} - a) = (f_n - a) + (f_{n-1} - a) + 1$ soit : $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + 1 - a$. On obtient une suite de Fibonacci en choisissant $a = 1$.
Les deux premiers termes en sont : $f_1 = e_1 + 1 = 2$; $f_2 = e_2 + 1 = 3$.
On parvient à l'expression :

$$f_n = \left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

On peut contrôler que les premiers termes de la suite $(f_n - 1)_{n\geq 1}$ donnée par cette expression explicite coïncident bien avec ceux obtenus par la relation de récurrence.