Ecrit 2, problème 2. Quelques théorèmes d'arithmétique. Indications

Le sujet est disponible sur le site du CAPES : http://capes-math.org/data/uploads/EP2_2013.pdf

Partie A : Théorème de Lagrange

3.1. Compte tenu de la définition de f : $f(x+1)=\prod_{k=1}^{k=p-1}(x+1+k)=\prod_{k=2}^{k=p}(x+k)$. Comparer avec l'expression de $f(x)$.

3.2. L'expression de $f(x)$ est un produit de $p-1$ facteurs du premier degré en x. dont il s'agit de considérer la forme développée (lien entre coefficients et racines …).

3.4. $p\,a_k$ est le coefficient du terme de degré $p-1-k$ du polynôme $p\,f(x)$. Compte tenu de la question 1, c'est aussi celui du terme de même degré du polynôme $(x+1)\,f(x+1)-x\,f(x)$. Il s'agit de déterminer ce coefficient.
Dans $x\,f(x)$, c'est a_{k+1}

Il reste à le déterminer dans : $(x+1)\,f(x+1)=(x+1)\sum_{i=0}^{i=p-1}a_i(x+1)^{p-1-i}=\sum_{i=0}^{i=p-1}a_i(x+1)^{p-i}$.

3.5. $p\,a_k=\sum_{i=0}^{i=k}a_i\binom{p-i}{k+1-i}=\binom{p}{k+1}+\sum_{i=1}^{i=k-1}a_i\binom{p-i}{k+1-i}+a_k\times(p-k)$.

3.6. Soit p un entier premier impair. Alors $p-1$ est un entier pair et $a_1=p\times\frac{p-1}{2}$ est divisible par p.
Montrer que la divisibilité par p des a_j est héréditaire jusqu'à l'héritier de rang $p-2$.

Partie B : Théorème de Wilson

2. En appliquant la relation **3.4** au rang $p-1$:

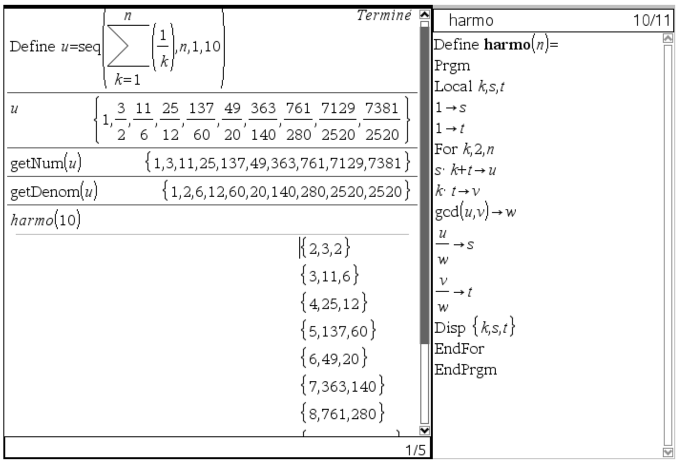
$$p\,a_{p-1}=p(p-1)!=p!=\sum_{i=0}^{i=p-1}\binom{p-i}{p-i}a_i=a_0+\sum_{i=1}^{i=p-2}a_i+a_{p-1}=1+\sum_{i=1}^{i=p-2}a_i+(p-1)!$$

3. Réciproquement, soit p un entier ≥ 2 et tel que $(p-1)!\equiv -1\ (p)$. Ou bien $p=2$ auquel cas p est premier, ou bien $p>2$ et pour tout entier k tel que $1<k\leq p-1$, il existe un entier u : $k\times\frac{(p-1)!}{k}=-1+p\,u$.

4.1. Par hypothèse la décomposition en produit de facteurs premiers de n est de la forme : $n=p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times n'$

4.2. Par hypothèse, puisque l'exposant α est plus grand que 2, n est de la forme : $n = p \times p^{\alpha-1} \times n'$ avec $1 < p < p^{\alpha-1} < n$ et n' premier avec p.

Partie C : Théorème de Wolstenholme



1. et **2**.
Deux façons d'obtenir les entiers demandés. On remarque que $s_4 = 25$, que $s_6 = 49$ et que $s_{10} = 7381 = 121 \times 61$

3. En général, pour un polynôme de degré n dont la forme factorisée est $\prod_{k=1}^{k=n} (x - r_k)$, le coefficient du premier degré est $(-1)^{n-1}(r_2 \ldots r_n + r_1 r_3 \ldots r_n + \ldots + r_1 r_2 \ldots r_{n-1})$ qu'il est plus commode d'écrire : $(-1)^{n-1}(r_1 \ldots r_n)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}\right)$

4. $f(-p) = \prod_{k=1}^{k=p-1} (k - p)$. En effectuant le changement d'indice $j = p - k$, une expression équivalente en est :
$f(-p) = \prod_{j=1}^{j=p-1} (-j) = (p-1)!$