Etude de la cissoïde de Dioclès[1]

Parmi d'autres définitions équivalentes, on définit la courbe cissoïdale de deux courbes (C_1) et (C_2) relativement à un point fixe O comme étant le lieu géométrique des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ où M_1 est sur (C_1), M_2 sur (C_2), ces deux points étant alignés avec O.

On peut obtenir la cissoïde de Dioclès de diverses façons. Ici, l'entame est de partir d'une équation cartésienne. Ensuite, on étudie la cissoïde de Dioclès en tant que lieu géométrique dans deux situations différentes, ce qui va justifier son appellation « cissoïde ». Ce problème est tiré de la « collection HAUTCOEUR », Belin Terminale C 1989. Son énoncé a été remanié.

Le sujet

Partie A. Une entame cartésienne

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* sur $[0\ ;\ 1[$.

2. Déterminer la fonction dérivée de *f* et dresser son tableau des variations.

3.1. Soit Γ_1 la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tracer cette courbe, sa tangente *T* en son point d'abscisse $\frac{1}{2}$, et la droite Δ d'équation $x = 1$.

3.2. Sur le même graphique, tracer la courbe Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe des abscisses.

3.3. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Montrer que Γ a pour équation cartésienne : $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$ **(E)**.

Cette courbe Γ est appelée « cissoïde de Dioclès ».

[1] Mathématicien grec du IIIème siècle avant JC, connu pour ses travaux sur la parabole, et par cette courbe qui porte son nom.

Partie B. Une entame paramétrique, la cissoïde en tant que lieu géométrique

On considère le point I de coordonnées $(1,\ 0)$, le cercle (C) de diamètre $[OI]$, ainsi que la droite Δ d'équation $x = 1$, tangente au cercle (C) en I, déjà apparue dans la partie A.

Une droite variable D passant par O, distincte de Oy, recoupe le cercle (C) en P et coupe la droite Δ en Q.
On définit le point M par l'égalité : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PQ}$. Le lieu de M lorsque D varie est, par définition, la « cissoïde de Dioclès » (sous réserve qu'il s'agit bien de la même courbe que celle de la partie A).

1. *Un paramétrage rationnel.*
On note t le coefficient directeur de la droite D, où t appartient à **R**.

1.1. Exprimer en fonction de t les coordonnées des points P, Q, et enfin M.

1.2. En s'aidant des valeurs 0 ; 1/2 ; 1 ; 2 du paramètre t, trouver quatre points de la courbe Γ.

2. *Un paramétrage trigonométrique*.
On note θ la mesure située dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ de l'angle polaire de la droite D (c'est à dire celle de l'angle que fait $\overrightarrow{OI}$ avec le vecteur unitaire de D d'abscisse strictement positive).

2.1. Ecrire une relation simple entre les paramètres t et θ.

2.2. Exprimer en fonction de θ les coordonnées de M.

2.3. En s'aidant des valeurs $\pi/6$ et $\pi/3$ de θ, obtenir deux nouveaux points de Γ.

3. Montrer que la courbe paramétrée ainsi construite est la courbe Γ.

Partie C. Un lieu géométrique qui est aussi une cissoïde

Soit (P) la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{4}$ dans un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.,

1. Si $A\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ est le point d'abscisse t de la parabole –où t est un réel quelconque, écrire une équation cartésienne de la tangente en A à la parabole et préciser un vecteur directeur de cette tangente.

2. On désigne par M le pied de la perpendiculaire menée du sommet O de la parabole à la tangente en A.

Exprimer les coordonnées du point M en fonction de t.

3. Effectuer le changement de paramètre : $t = 2u$ et exprimer les coordonnées de M en fonction de u.

4. Montrer que l'ensemble des points M obtenus lorsque A décrit la parabole est l'image par une rotation que l'on précisera de la courbe Γ.

2. Eléments de correction

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1[$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$

1. *f* est un cocktail de fonctions continues sur $[0\ ;\ 1[$, elle y est continue. C'est un cocktail de fonctions dérivables sur l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$, elle y est dérivable.

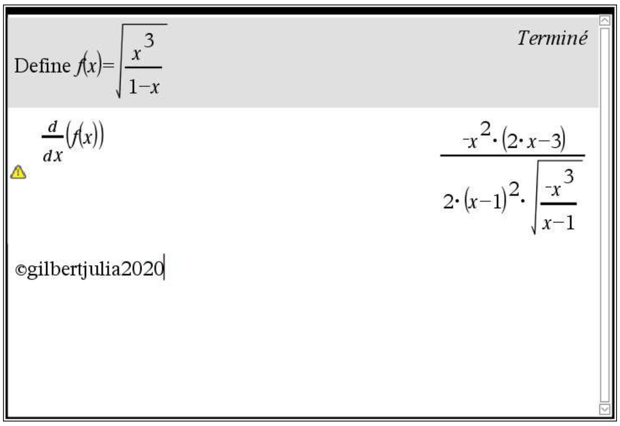
En revanche, la fonction racine, ingrédient du cocktail, n'est pas dérivable en zéro, une étude spécifique s'impose en ce point.

Or, pour tout x appartenant à l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ et en conséquence : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\right)=0$, ce qui permet d'affirmer que *f* est dérivable en zéro et que son nombre dérivé en ce point est égal à zéro.

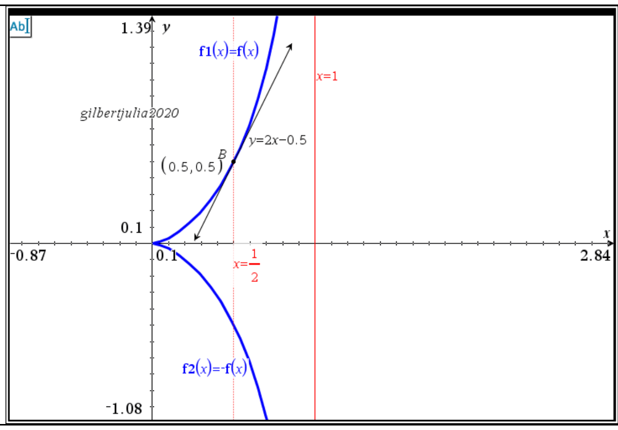
2. On peut retenir que la dérivée de la fonction *f* est définie par : $f'(x)=\dfrac{x^2(3-2x)}{2(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}$ lorsque x appartient à l'intervalle ouvert $]0,\ 1[$, et que cette fonction dérivée peut être prolongée par 0 en 0.

Il s'agit d'une fonction strictement positive sur $]0,\ 1[$, la fonction *f* est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1[$

Sans aucune indétermination : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)=+\infty$



Le point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ étant le point $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et le nombre dérivé de *f* en $\dfrac{1}{2}$ étant égal à 2, une équation de la tangente en *B* est : $y=2x-\dfrac{1}{2}$



3. La courbe Γ_2 étant symétrique de Γ_1 par rapport à Ox, elle est représentative de la fonction opposée $-f$.

Soit $M(x,\ y)$ un point du plan.

$M(x,\ y)\in\Gamma_1 \Leftrightarrow y=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ et $M(x,\ y)\in\Gamma_2 \Leftrightarrow y=-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

Ainsi : $M(x,\ y)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2 \Leftrightarrow y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0$ *ou bien* $y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0$

Mais $\left(y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0 \text{ ou bien } y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0\right)\Leftrightarrow\left(y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)\times\left(y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)=0$ en vertu du principe que « un produit de facteurs est nul si l'un ou bien l'autre facteur est nul ».

Compte tenu que : $\left(y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)\times\left(y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)=y^2-\dfrac{x^3}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}\left(y^2-x\left(x^2+y^2\right)\right)$ et que la relation $y^2-x\left(x^2+y^2\right)=0$ n'est jamais vérifiée si $x=1$:
$M(x,\ y)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2 \Leftrightarrow y^2-x\left(x^2+y^2\right)=0$. Cette équation constitue une équation cartésienne de la courbe Γ.
On note, vu la propriété de continuité et les variations de *f*, que *f* réalise une bijection de l'intervalle $[0,\ 1[$ sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$ et donc sa fonction opposée réalise une bijection de l'intervalle $[0,\ 1[$ sur l'intervalle $]-\infty,\ 0]$. Ainsi, quel que soit le réel y_0 donné, il existe un point et un seul de la courbe Γ dont l'ordonnée est égale à y_0.

Partie B

1. *Un paramétrage cartésien*
La sécante D de pente t passant par O a pour équation $y=t\,x$.
Pour obtenir son point d'intersection P avec le cercle, on obtient l'équation dont x doit être solution : $x^2+t^2x^2-x=0$ qui a pour solution non nulle : $x=\dfrac{1}{1+t^2}$ et donc $y=\dfrac{t}{1+t^2}$ alors que le point Q a pour coordonnées $(1,\ t)$.

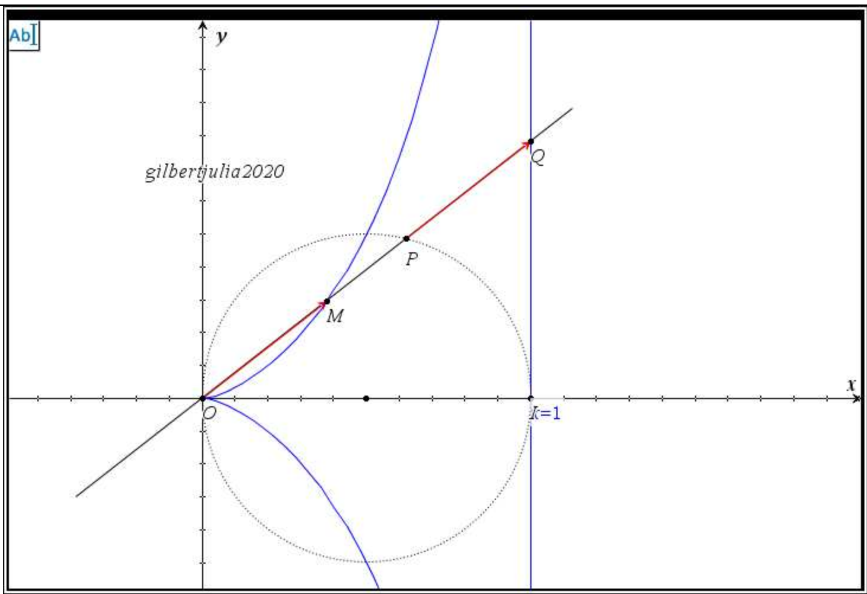
Le vecteur $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{PQ}$ a donc pour coordonnées, et ce sont aussi celles du point M : $x_M=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y_M=\dfrac{t^3}{1+t^2}$

2. *Un paramétrage trigonométrique*.
La relation entre t et θ est : $t=\tan\theta$ et ceci donne $x_M=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin^2\theta$ et $y_M=\dfrac{\sin^3\theta}{\cos\theta}$

Chaque paramétrage a ses avantages et ses inconvénients. Les deux paramétrages ne donnent pas les mêmes points « simples » par lesquels passe la courbe :

cartésien				trigonométrique			
0	$\frac{1}{2}$	1	2	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$(0,\ 0)$	$\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$	$(0,\ 0)$	$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

En prenant les valeurs opposées de ces paramètres, on obtient d'autres points de la courbe, symétriques par rapport à Ox.

Graphiquement, cela donne ceci :	
On vérifie avec le paramétrage cartésien que les coordonnées d'un point de la courbe paramétrée vérifient l'équation cartésienne de Γ.	Define $u(t)=\frac{t^2}{1+t^2}$ Terminé Define $v(t)=\frac{t^3}{1+t^2}$ Terminé $u(t)\cdot\left((u(t))^2+(v(t))^2\right)$ $\frac{t^6}{(t^2+1)^2}$ $\frac{t^6}{(t^2+1)^2}=(v(t))^2$ true ©gilbertjulia2020

Mais on peut le vérifier aussi bien avec le paramétrage trigonométrique. Ce qui prouve que la courbe paramétrée est incluse dans la courbe Γ. En remarquant que lorsque t décrit **R** en entier, il en est de même de $\dfrac{t^3}{1+t^2}$ (donc, toutes les ordonnées sont balayées en faisant varier t) , on est certain que la courbe paramétrée contient tous les points de la courbe Γ ; les deux courbes sont identiques.	$\dfrac{\ }{(t^2+1)^2}=(v(t))$ ©gilbertjulia2020 Define $u(t)=(\sin(t))^2$ — *Terminé* Define $v(t)=\dfrac{(\sin(t))^3}{\cos(t)}$ — *Terminé* $u(t)\cdot\left((u(t))^2+(v(t))^2\right)$ — $\dfrac{(\sin(t))^6}{(\cos(t))^2}$ $\dfrac{(\sin(t))^6}{(\cos(t))^2}=(v(t))^2$ — true

Partie C

1. (P) étant la parabole d'équation $y=\dfrac{x^2}{4}$, elle est représentative de la fonction dérivable $x\mapsto h(x)=\dfrac{x^2}{4}$, de dérivée la fonction $x\mapsto h'(x)=\dfrac{x}{2}$

Si $A\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ est le point d'abscisse t de la parabole, une équation cartésienne de la tangente en A à la parabole est : $y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t}{2}(x-t)$ soit : $y=\dfrac{t}{2}x-\dfrac{t^2}{4}$.

Un vecteur directeur de cette tangente est le vecteur de coordonnées $\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)$.

2. Un point $M\,(x,\ y)$ appartient à la perpendiculaire en O à la tangente en A si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal au vecteur de coordonnées $\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)$, ce qui se traduit par la relation : $x+\dfrac{t}{2}y=0$

Ce point est la projection orthogonale de O sur la tangente si et seulement si les coordonnées de M vérifient cette relation et aussi l'équation de la tangente. C'est-à-dire si et seulement si $(x,\ y)$ est un couple solution du système : $\begin{cases} y=\dfrac{t}{2}x-\dfrac{t^2}{4} \\ x+\dfrac{t}{2}y=0 \end{cases}$.

Ce système admet, quelle que soit la valeur de t, un unique couple solution qui est le couple : $\left(x=\dfrac{t^3}{2\left(t^2+4\right)}\ ;\ y=-\dfrac{t^2}{\left(t^2+4\right)}\right)$.

L'ensemble des pieds M des perpendiculaires menées du sommet O de la parabole aux tangentes à cette parabole est la courbe paramétrée définie par les relations : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^3}{2\left(t^2+4\right)} \\ y(t)=-\dfrac{t^2}{\left(t^2+4\right)} \end{cases}$, où t appartient à $\mathbf{R}$.

linSolve$\left(\begin{cases} y=\dfrac{t\cdot x}{2}-\dfrac{t^2}{4} \\ x+\dfrac{t\cdot y}{2}=0 \end{cases},\{x,y\}\right)$ $\left\{\dfrac{t^3}{2\cdot\left(t^2+4\right)},\dfrac{-t^2}{t^2+4}\right\}$

Define $t=2\cdot z$ *Terminé*

$\dfrac{t^3}{2\cdot\left(t^2+4\right)}$ $\dfrac{z^3}{z^2+1}$

$\dfrac{-t^2}{t^2+4}$ $\dfrac{-z^2}{z^2+1}$

©gilbertjulia2020

3. Le changement de paramètre $t=2u$ (qui est réversible) fait apparaître que cette courbe paramétrée peut aussi bien être paramétrée par les relations : $\begin{cases} x(u)=\dfrac{u^3}{u^2+1} \\ y(u)=-\dfrac{u^2}{u^2+1} \end{cases}$ où u appartient à $\mathbf{R}$.

Si l'on considère la rotation r de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$, cette rotation transforme un point de coordonnées $(x,\ y)$ en le point dont les coordonnées sont $(-y,\ x)$. Le point de coordonnées $\begin{cases} x(u)=\dfrac{u^3}{u^2+1} \\ y(u)=-\dfrac{u^2}{u^2+1} \end{cases}$ admet pour image par r le point de coordonnées $\begin{cases} -y(u)=\dfrac{u^2}{u^2+1} \\ x(u)=\dfrac{u^3}{u^2+1} \end{cases}$, qui est le point de paramètre u dans le paramétrage cartésien de la courbe Γ.

Le lieu géométrique en question a pour image par r la courbe Γ. Il en est donc l'image par la rotation réciproque de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Ce lieu est aussi une cissoïde de Dioclès. Ses éléments géométriques sont les images du cercle (C) et de la droite Δ par cette rotation réciproque.