Moyennes arithmético-géométriques

Ce problème est à l'origine inspiré par l'épreuve 1 de la session 1995 du CAPES de Mathématiques mais l'énoncé s'en écarte significativement. Il ne semble plus en effet que les développements du sujet 1995, certes intéressants (une flopée de décimales de Pi …), soient en phase avec les critères du CAPES actuel.

L'objectif est ici d'étudier deux variantes de la notion de moyenne arithmético-géométrique de deux nombres positifs. Rien de plus, mais rien de moins …

En préambule, on rappelle quelques propriétés utiles des moyennes arithmétique et géométrique

Le sujet

0. Un préambule …

Soit a et b deux réels positifs. On leur associe ici deux nombres, qualifiés de « moyennes » :

- La moyenne arithmétique de ces deux nombres est le réel $m_A(a, b) = \dfrac{a+b}{2}$.
- La moyenne géométrique de ces deux nombres est le réel $m_G(a, b) = \sqrt{ab}$.

0.1. Démontrer que $m_G(a, b) \leq m_A(a, b)$, l'égalité n'ayant lieu que si $a = b$.

0.2. On suppose que $0 < b < a$.

Montrer que $b < m_G(a, b) < m_A(a, b) < a$.

Montrer que : $m_A(a, b) - m_G(a, b) \leq \dfrac{1}{8b}(a-b)^2$.

Partie A : l'authentique moyenne arithmético-géométrique, la vraie de vrai

Etant donné deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on note (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$a_0 = a$; $b_0 = b$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+1} = m_A(a_n, b_n) = \dfrac{a_n + b_n}{2}$; $b_{n+1} = m_G(a_n, b_n) = \sqrt{a_n b_n}$.

(Autrement dit, deux termes étant calculés, on forme leurs moyennes, arithmétique et géométrique, pour calculer les deux suivants)

1. On suppose que l'un des deux nombres au moins est nul. Que peut-on dire de ces deux suites et de leur limite ?

Désormais, on supposera que a et b sont strictement positifs.

2. Convergence des suites (a_n) et (b_n)

2.1. Démontrer que pour $n \geq 1$ et pour $a \neq b$: $\begin{cases} 0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n) \end{cases}$

Que deviennent ces inégalités si $a = b$?

2.2. Démontrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite. On notera $M(a, b)$ cette limite commune.

Le nombre $M(a, b)$ s'appelle la moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b.

3. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Montrer que quels que soient les réels positifs a, b et λ et quel que soit l'entier naturel p : $\begin{cases} M(a_p, b_p) = M(a, b) \\ M(b, a) = M(a, b) \\ M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b) \end{cases}$

En déduire que, pour $a > 0$: $M(a, b) = a.M\left(1, \dfrac{b}{a}\right)$

4. ***Un exemple.*** Dans cette question, on suppose que $b = 1$; $a = 2$

4.1. Calculer les valeurs exactes de a_1 ; b_1 ; a_2 ; b_2 .

4.2. En s'aidant des valeurs de a_1 et de b_1 justifier que pour $n \geq 1$: $a_n - b_n \leq \dfrac{1}{8\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^{n-1}}$

4.3. Donner un encadrement de $M(1, 2)$ d'amplitude 10^{-6}

Partie B : Une autre moyenne, du même tonneau

Etant donné deux nombres réels strictement positifs a et b, on note (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et pour tout entier naturel n :

- $u_{n+1} = m_A(u_n, v_n) = \dfrac{u_n + v_n}{2}$; $v_{n+1} = m_G(u_{n+1}, v_n) = \sqrt{u_{n+1}\, v_n} = \sqrt{\dfrac{v_n(u_n + v_n)}{2}}$.

(Autrement dit, deux termes étant calculés, on forme d'abord leur moyenne arithmétique puis la moyenne géométrique de cette moyenne arithmétique et du deuxième terme pour calculer les deux suivants ; les formules sont asymétriques)

1. Calculer u_1 et v_1 en fonction de a et de b. Selon les valeurs relatives de a et de b, discuter quel est l'ordre de rangement des quatre nombres a, b, u_1 et v_1.

2.1. Suivant que $0 < b < a$ ou $0 < b = a$ ou bien que $0 < a < b$, déterminer pour tout entier naturel n quel est l'ordre de rangement des nombres $a, b, u_n, v_n, u_{n+1}, v_{n+1}$.

2.2. En déduire que, quel que soit le cas de figure, les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3.1. Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2\left(1 + \dfrac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{\dfrac{u_n + v_n}{2}}}\right)}$ puis que $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^n}|a - b|$

3.2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune. On note $M'(a, b)$ cette limite commune.

4. Montrer que : $M'(a, b) = b\,M'\left(\dfrac{a}{b}, 1\right)$

5. Soit α un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. L'objectif de cette question est de donner une expression concrète de la limite $M'(a,b)$ dans un cas particulier, le cas où $a=\cos\alpha\ ;b=1$. Les suites (u_n) et (v_n) dont il est question ont donc pour termes initiaux : $u_0=\cos\alpha$ et $v_0=1$

5.1. Exprimer en fonction de α les termes de rang 1 puis ceux de rang 2.

5.2. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$: $v_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et : $u_n=v_n\times\cos\frac{\alpha}{2^n}$

5.3. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$: $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$

5.4. Montrer que : $M'(\cos\alpha,1)=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$

5.5. Quelle expression proposeriez-vous en général pour $M'(a,b)$ dans le cas où $0<b<a$?

Par exemple, que vaudrait selon vous $M'(1,2)$?

6.1. On suppose dans cette question que $a=\cosh\alpha\ ;b=1$ où la notation cosh désigne le cosinus hyperbolique et où α est un réel strictement positif. Que dire de $M'(\cosh\alpha,1)$?

6.2. Que vaudrait selon vous $M'(2,1)$?

Eléments de correction.

0. Un préambule…

0.1.

Soit a et b deux réels positifs. Formons la différence de leurs deux moyennes :

$$m_A(a,\,b)-m_G(a,\,b)=\left(\frac{a+b}{2}\right)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Cette différence est un réel positif, et même strictement positif lorsque a et b sont distincts. La plus grande des deux moyennes est l'arithmétique. Quels que soient les réels a et b positifs : $m_G(a,\,b)\leq m_A(a,\,b)$, l'égalité n'ayant lieu que si $a=b$.

0.2. Si on suppose que $0<b<a$:

$$b=\frac{b+b}{2}<\frac{a+b}{2}<\frac{a+a}{2}=a \text{ donc } b<m_A(a,\,b)<a$$

$$b=\sqrt{b\times b}<\sqrt{ab}<\sqrt{a\times a}=a \text{ donc } b<m_G(a,\,b)<a$$

Les deux moyennes s'intercalent entre a et b (et ce résultat ne dépend pas de la position relative de a et de b).

D'autre part, sachant que : $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, il est possible d'écrire :

$$m_A(a,\,b)-m_G(a,\,b)=\frac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}(a-b)^2 \;.$$

Si l'on suppose que $0<b<a$: $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\leq\dfrac{1}{2\left(2\sqrt{b}\right)^2}=\dfrac{1}{8b}$ et en conséquence : $m_A(a,\,b)-m_G(a,\,b)\leq\dfrac{1}{8b}(a-b)^2$

Partie A

1. Si l'un des deux nombres au moins a ou b est nul, leur moyenne géométrique est nulle. Ainsi : $b_1 = 0$ et a_1 est égal à la moitié de celui des deux nombres éventuellement non nul.

Par récurrence évidente, pour tout entier n au moins égal à 1 : $b_n = 0$ et $a_n = a_1 \times \frac{1}{2^{n-1}}$. Dans ce cas l'une des suites est stationnaire à zéro et l'autre est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et convergente vers zéro.

Dans ce cas : $M(a, b) = 0$.

Désormais, a et b seront tous deux strictement positifs.

2.1. Quel que soit l'ordre de rangement des termes initiaux distincts a_0 et b_0, les termes de rang 1, à savoir a_1 et b_1, sont toujours tels que $0 < b_1 < a_1$ puisqu'il s'agit des moyennes respectivement arithmétique et géométrique de deux réels strictement positifs distincts.

- L'inégalité $m_G(a_n, b_n) = b_{n+1} < a_{n+1} = m_A(a_n, b_n)$ pour tout entier naturel n est acquise d'après la question préliminaire et la position relative des deux moyennes. Elle permet de justifier l'inégalité $0 < b_n < a_n$ pour tout entier $n \geq 1$ soit nécessaire de recourir à une récurrence.
- Dès lors que cette inégalité est justifiée, le rangement $0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ pour tout entier $n \geq 1$ l'est aussi en vertu du rangement de deux réels strictement positifs et de leurs moyennes (sans récurrence non plus).

D'autre part, sous les mêmes hypothèses et d'après la question préliminaire, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = m_A(a_n, b_n) - m_G(a_n, b_n) = \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right).$$

Or, à partir du rang 1 au moins, $0 < b_n < a_n$ et donc $2\sqrt{a_n b_n} > 2\sqrt{b_n^{\,2}} = 2b_n$.

Il en résulte l'inégalité, à partir du rang 1 au moins : $a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n + b_n - 2b_n) = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$

Des diverses inégalités : $\begin{cases} a_n - b_n < \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) \\ \ldots \\ a_2 - b_2 < \frac{1}{2}(a_1 - b_1) \end{cases}$ on déduit la majoration $a_n - b_n < (a_1 - b_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ par multiplication membre à membre.

Si $a = b$, ces inégalités deviennent des égalités et on obtient deux suites constantes dont tous les termes sont égaux à la valeur commune. Dans ce cas : $M(a, a) = a$

2.2.

- La suite (a_n) est décroissante et la suite (b_n) est croissante.
- La suite $(a_n - b_n)$ de leurs différences est dès le terme de rang 1 majorée par la suite géométrique $(a_1 - b_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ suite convergeant vers 0 : cette suite $(a_n - b_n)$ de leurs différences converge elle-même vers 0.

Les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes : elles sont convergentes et ont une limite commune.
Ce qui justifie l'existence du nombre $M(a, b)$.

3. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique

Soit (a_n) et (b_n) les suites associées aux valeurs initiales $a = a_0$; $b = b_0$. Soit p un entier naturel et considérons les suites (a_{n+p}); (b_{n+p}) obtenues par translation d'indice : $n \mapsto n + p$. Il s'agit des suites associées aux valeurs initiales a_p et b_p.

Une translation d'indice sur les termes d'une suite ne changeant pas la valeur de sa limite : $M(a_p, b_p) = M(a, b)$.

Considérons les suites construites l'une avec les valeurs initiales $a = a_0$; $b = b_0$ et l'autre avec les valeurs initiales $a = b_0$; $b = a_0$. Leurs termes de rang 1 sont identiques, en vertu des propriétés de commutativité de l'addition et de la multiplication. D'après la propriété précédente appliquée avec $p = 1$: $M(b, a) = M(a_1, b_1) = M(a, b)$.

Pour tout réel positif λ, si on multiple deux nombres positifs par λ, leurs moyennes arithmétique et géométrique sont elles-mêmes multipliées par λ : $m_A(\lambda a, \lambda b) = \lambda\, m_A(a, b)$; $m_G(\lambda a, \lambda b) = \lambda\, m_G(a, b)$.

Pour tous réels positifs a, b, soit (a_n) et (b_n) les suites construites l'une avec les valeurs initiales $a = a_0$; $b = b_0$.

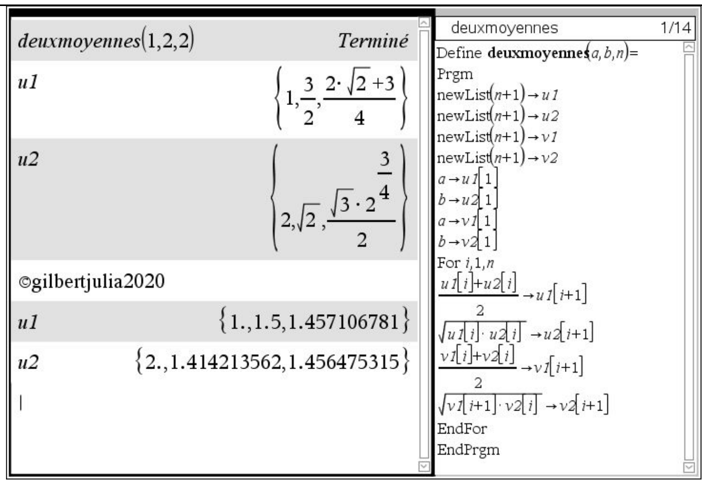
Les suites construites avec les valeurs initiales $(\lambda a ; \lambda b)$ sont alors les suites $\lambda.(a_n)$; $\lambda.(b_n)$, de termes généraux λa_n et λb_n et dont la limite commune est $\lambda M(a, b)$: $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

En vertu de cette propriété, pour tout réel a strictement positif : $M(a, b) = M\left(a, a \times \frac{b}{a}\right) = a M\left(1, \frac{b}{a}\right)$

4. Un exemple

4.1. Les listes **u1** et **u2** proposent les valeurs exactes des trois premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

Sur la droite de l'écran, un programme permet de lister non seulement en **u1** et en **u2** les n premiers termes des deux suites en jeu mais aussi en **v1** et en **v2** les n premiers termes des deux suites qui seront en jeu dans la partie B.



4.2. Si on applique l'inégalité $m_A(a,\, b)-m_G(a,\, b)\leq \frac{1}{8b}(a-b)^2$ aux termes de rang n des suites (a_n) et (b_n) nous obtenons : $a_{n+1}-b_{n+1}\leq \frac{1}{8b_n}(a_n-b_n)^2$, mais l'ordre de rangement des différents termes en jeu implique, entre autres, que : $b_1\leq b_n$. En conséquence : $a_{n+1}-b_{n+1}\leq \frac{1}{8b_1}(a_n-b_n)^2=\frac{1}{8\sqrt{2}}(a_n-b_n)^2$ dans notre contexte.

Il s'agit là d'une majoration de type quadratique, de la forme : $a_{n+1}-b_{n+1}\leq q.(a_n-b_n)^2$ avec ici $q=\frac{1}{8\sqrt{2}}$

Dans un tel cas de majoration, on peut écrire, successivement :

$$a_n-b_n\leq q\times(a_{n-1}-b_{n-1})^2$$
$$(a_{n-1}-b_{n-1})^2\leq q^2\times(a_{n-2}-b_{n-2})^4$$
$$(a_{n-2}-b_{n-2})^4\leq q^4\times(a_{n-3}-b_{n-3})^8$$

….

$$(a_{n-k}-b_{n-k})^{2^k}\leq q^{2^k}\times(a_{n-k-1}-b_{n-k-1})^{2^{k+1}}$$

…

$$(a_2-b_2)^{2^{n-2}}\leq q^{2^{n-2}}\times(a_1-b_1)^{2^{n-1}}$$

La multiplication membre à membre de ces inégalités crée une « élimination télescopique » des termes intermédiaires :

$a_n-b_n\leq q^{1+2+\ldots+2^{n-2}}\times(a_1-b_1)^{2^{n-1}}$ et compte tenu que $1+2+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}$, on obtient au bout du compte :

$$a_n-b_n\leq q^{2^{n-1}-1}\times(a_1-b_1)^{2^{n-1}}=\frac{1}{q}\left[q(a_1-b_1)\right]^{2^{n-1}}$$

La majoration obtenue est ainsi : $a_n-b_n\leq \frac{1}{q}\left[q(a_1-b_1)\right]^{2^{n-1}}$

Sachant qu'ici $q=\frac{1}{8\sqrt{2}}$ et $a_1-b_1=\frac{3}{2}-\sqrt{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{q}=8\sqrt{2}\leq 12$ et $q\times(a_1-b_1)=\frac{3-2\sqrt{2}}{16\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-4}{32}\leq 0{,}006$.

4.3. Nous pouvons proposer : $a_n - b_n \leq 12[0{,}006]^{2^{n-1}}$. Cette majoration présage d'une convergence très rapide.

Pour obtenir un encadrement de la limite d'amplitude 10^{-6}, il suffit de prendre les termes de rang 3.

L'encadrement $b_3 < M(1{,}2) < a_3$ fournit ici : $1{,}456791 < M(1{,}2) < 1{,}4567911$ encadrement dont l'amplitude est inférieure à 10^{-6}.

	A	B u1	C u2	D	E
=	=seq(n,r				
1	0.	1.	2.		
2	1.	1.5	1.414213562	gilbertjulia2020	
3	2.	1.457106781	1.456475315		
4	3.	1.456791048	1.456791014		
5	4.	1.456791031	1.456791031		
6	5.	1.456791031	1.456791031		
7					
8					

Partie B : Une autre moyenne du même tonneau

1. Les termes de rang 1 sont $u_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $v_1 = \sqrt{\dfrac{b(a+b)}{2}}$.

D'une part, u_1 est la moyenne arithmétique de a et b il est situé entre ces deux nombres.

D'autre part, v_1 est la moyenne géométrique de b et de u_1, il est situé entre ces deux nombres.

Trois cas se présentent :

- Si $0 < b < a$, alors l'ordre de rangement est $0 < b < v_1 < u_1 < a$.
- Si $0 < b = a$, alors l'ordre de rangement est $0 < b = v_1 = u_1 = a$.
- Si $0 < a < b$, alors l'ordre de rangement est $0 < a < u_1 < v_1 < b$.

2.1. Plus généralement, étant donné un entier naturel n : u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n il est situé entre ces deux nombres ; v_{n+1} est la moyenne géométrique de u_{n+1} et de v_n, il est situé entre ces deux nombres.

En conséquence :

- Si $0 < u_n < v_n$, alors l'ordre de rangement est $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.
- Si $0 < u_n = v_n$, alors l'ordre de rangement est $0 < u_n = u_{n+1} = v_{n+1} = v_n$.
- Si $0 < v_n < u_n$, alors l'ordre de rangement est $0 < v_n < v_{n+1} < u_{n+1} < u_n$.

2.2. L'ordre de rangement des termes u_{n+1} et v_{n+1} est le même que celui des termes u_n et v_n. Donc, l'ordre de rangement des premiers termes induit celui de tous les autres :

- Si $0 < b < a$, alors la suite (v_n) est croissante, la suite (u_n) est décroissante. De plus (v_n) est majorée, par a par exemple et (u_n) est minorée, par b par exemple.
- Si $0 < b = a$, alors les suites sont constantes.
- Si $0 < a < b$, la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante. De plus (u_n) est majorée, par a par exemple et (v_n) est minorée, par b par exemple.

Quel que soit le cas de figure, nous obtenons une suite croissante et majorée ainsi qu'une suite décroissante et minorée. Chacune des deux suites (u_n) et (v_n) est une suite convergente.

Il reste à montrer qu'elles ont la même limite.

3.1. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{\frac{v_n(u_n + v_n)}{2}} = \sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}}\left(\sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}} - \sqrt{v_n}\right) = \sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}} \times \frac{u_n - v_n}{2\left(\sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}} + \sqrt{v_n}\right)}$$

Soit : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2\left(1 + \dfrac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}}}\right)}$. Vu la positivité de $\dfrac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{\frac{u_n + v_n}{2}}}$, nous obtenons pour tout entier naturel n l'inégalité : $|u_{n+1} - v_{n+1}| \leq \dfrac{|u_n - v_n|}{2}$, d'où l'on déduit par télescopie : $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{2^n}|a - b|$.

3.2. La suite des valeurs absolues des différences $(|u_n - v_n|)$ étant majorée par une suite géométrique de limite nulle, la suite des différences $(u_n - v_n)$ converge vers zéro quel que soit le cas de figure.

Ce qui justifie l'adjacence des deux suites (u_n) et (v_n) et leur convergence vers une limite commune située entre a et b.

4. On a vu que pour tout réel positif λ, si on multiple deux nombres positifs par λ, leurs moyennes arithmétique et géométrique sont elles-mêmes multipliées par λ , propriété qui produit le même effet que dans la partie A :

Pour tous réels positifs a, b, soit (u_n) et (v_n) les suites construites l'une avec les valeurs initiales $a = u_0$; $b = v_0$.

Les suites construites avec les valeurs initiales $(\lambda a\,;\,\lambda b)$ sont alors les suites $\lambda.(u_n)\,;\lambda.(v_n)$: $M'(\lambda a, \lambda b) = \lambda M'(a, b)$.

En vertu de cette propriété, pour tout réel a strictement positif : $M'(a, b) = M'\left(\dfrac{a}{b} \times b, 1 \times b\right) = b\,M'\left(\dfrac{a}{b}, 1\right)$

5.1. Si $b=1$; $a=\cos\alpha$, les termes des rangs 1 et 2 se calculent ainsi :

$$u_1=\frac{\cos\alpha+1}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\ ;\ v_1=\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$u_2=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}\ ;\ v_2=\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}\times\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\ .$$

5.2. Il n'est pas interdit de conjecturer les formules : $v_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$; $u_n=v_n\times\cos\frac{\alpha}{2^n}$, qui sont ainsi initialisées aux deux premiers rangs 1 et 2.

Supposons qu'elles soient exactes à un certain rang n. Alors au rang suivant :

$$u_{n+1}=\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)\times\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2^n}}{2}=\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)\times\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}=\left(\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)\times\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

$$v_{n+1}==\sqrt{\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)\times\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}\times\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)}=\left(\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)\times\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}=\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$$

Les formules sont héréditaires. Elles sont donc exactes pour tout entier n strictement positif.

5.3. Considérons la formule $\sin 2x=2\sin x\cos x$ sous la forme $\cos x=\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{\sin x}$ pour les valeurs $x=\frac{\alpha}{2^k}$ avec k allant de 1 à n : $\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{\sin\frac{\alpha}{2^k}}$. En effectuant le produit membre à membre des k relations écrites , nous obtenons au second membre une élimination téléscopique. Il subsiste : $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$.

5.4. Ce qui permet une nouvelle expression pour v_n, à savoir : $v_n=\frac{1}{2^n}\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$ ou encore pour faire apparaître une limite de référence : $v_n=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\right)$. Lorsque n tend vers plus l'infini, $\frac{\alpha}{2^n}$ tend vers zéro et $\left(\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\right)$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

On en conclut que : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

5.5. Lorsque $0 < b < a$, le nombre $\dfrac{b}{a}$ est un réel compris, au sens strict, entre 0 et 1. Il s'agit du cosinus d'un réel de l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On est amené à poser : $\alpha = \arccos\left(\dfrac{b}{a}\right)$ et alors : $M'(a,\, b) == b\,M'(\cos\alpha,\, 1) = b\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

En particulier, si $a = 1$; $b = 2$ on considère $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ ce qui conduit à : $M'(1,\, 2) = 2\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\pi/3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$

Les dix premiers termes des suites (u_n) et (v_n) lorsque les valeurs initiales sont 1 et 2. On constate que la convergence est moins rapide que pour les suites de la partie A.

	A	B v1	C v2	D	E
=	=seq(n,n,(				
1	0.	1.	2.		
2	1.	1.5	1.7320508	gilbertjulia2020	
3	2.	1.6160254	1.6730326		
4	3.	1.644529	1.6587196		
5	4.	1.6516243	1.6551681		
6	5.	1.6533962	1.6542819		
7	6.	1.6538391	1.6540605		
8	7.	1.6539498	1.6540051		
9	8.	1.6539775	1.6539913		
10	9.	1.6539844	1.6539878		
11	10.	1.6539861	1.653987		

D2 *gilbertjulia2020*

La valeur que nous avons annoncée pour limite commune de ces suites est « plausible ».

deuxmoyennes(1,2,2) *Terminé*

u1 $\left\{1,\dfrac{3}{2},\dfrac{2\cdot\sqrt{2}+3}{4}\right\}$

u2 $\left\{2,\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2}\right\}$

©gilbertjulia2020

deuxmoyennes(1,2,10) *Terminé*

$\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}$ $\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}$

$\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\pi}$ 1.6539867

Si $b=1$; $a=\cosh\alpha$ (cosinus hyperbolique), les termes des rangs 1 et 2 se calculent ainsi :

$$u_1=\frac{\cosh\alpha+1}{2}=\cosh^2\frac{\alpha}{2}\ ;\ v_1=\sqrt{\frac{\cosh\alpha+1}{2}}=\cosh\frac{\alpha}{2}$$

$$u_2=\frac{\cosh^2\frac{\alpha}{2}+\cosh\frac{\alpha}{2}}{2}=\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh^2\frac{\alpha}{4}\ ;\ v_2=\sqrt{\cosh^2\frac{\alpha}{2}\times\cosh^2\frac{\alpha}{4}}=\cosh\frac{\alpha}{2}\cosh\frac{\alpha}{4}.$$

Les formules utilisées sont semblables à celles de la trigonométrie ordinaire.

On montre par récurrence les formules : $v_n=\prod_{k=1}^{n}\cosh\frac{\alpha}{2^k}$; $u_n=v_n\times\cosh\frac{\alpha}{2^n}$, puis $\prod_{k=1}^{n}\cosh\frac{\alpha}{2^k}=\frac{1}{2^n}\frac{\sinh\alpha}{\sinh\frac{\alpha}{2^n}}$

Enfin avec : $v_n=\frac{\sinh\alpha}{\alpha}\left(\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sinh\frac{\alpha}{2^n}}\right)$ et en passant à la limite lorsque n tend vers plus l'infini, On en conclut que : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{\sinh\alpha}{\alpha}$.

Lorsque $0<a<b$, le nombre $\frac{b}{a}$ est un réel strictement supérieur à 1. Il s'agit du cosinus hyperbolique d'un réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On est amené à poser : $\alpha=\operatorname{arccos}\left(\frac{b}{a}\right)$ et alors : $M'(a,b)==b\,M'(\cosh\alpha,1)=b\frac{\sinh\alpha}{\alpha}$

En particulier, si $a=2$; $b=1$ on considère $\alpha=\arg\cosh(2)$ ce qui conduit à : $M'(2{,}1)=\frac{\sinh(\arg\cosh(2))}{\arg\cosh(2)}$

Les dix premiers termes des suites (u_n) et (v_n) lorsque les valeurs initiales sont 2 et 1.

	A	B v1	C v2	D	E	F
=						
1		2.	1.			
2		1.5	1.2247449			
3		1.3623724	1.291727	gilbertjulia2020		
4		1.3270497	1.3092692			
5		1.3181595	1.3137068			
6		1.3159332	1.3148195			
7		1.3153763	1.3150979			
8		1.3152371	1.3151675			
9		1.3152023	1.3151849			
10		1.3151936	1.3151893			
11		1.3151914	1.3151904			

D3 *gilbertjulia2020*

La valeur que nous avons annoncée pour limite commune de ces suites est « plausible ». Les résultats attestent, si l'on n'en était pas encore convaincu, que cette fois il y a bien une asymétrie $M'(b,\, a) \neq M'(a,\, b)$	*deuxmoyennes*(2,1,10) *Terminé* Define $c=\cosh^{-1}(2)$ *Terminé* c 1.3169579 $\frac{\sinh(c)}{c}$ 1.3151907 ©gilbertjulia2020