Autour de la racine cubique de 2

Ce problème est inspiré du « problème de révision » 5.73 page 190 du Gourion-Novelli Terminale C Nathan 1979. Il n'est plus à démontrer qu'il y avait à l'époque des problèmes venus d'une autre planète que celle où barbotent les Terminales prétendues « scientifiques » actuelles.

1. Le sujet

A. La racine cubique de 2 est irrationnelle et n'est pas solution d'une équation au second degré à coefficients rationnels non tous nuls.

1. Montrer que le nombre réel $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un rationnel.

2. Les nombres *a, b, c* étant rationnels on considère l'équation d'inconnue réelle x : $a\,x^2+b\,x+c=0$ (1)

2.1. Montrer que si $\sqrt[3]{2}$ est solution de cette équation, alors elle aussi racine de : $b\,x^2+c\,x+2a=0$ (2)

2.2. Montrer qu'alors $\sqrt[3]{2}$ est aussi racine de : $(b^2-a\,c)x+b\,c-2a^2=0$.

2.3. En déduire que si $b^2-a\,c\neq 0$, le réel $\sqrt[3]{2}$ ne peut pas être solution de (1).

2.4. Si $b^2-a\,c=0$ et si $\sqrt[3]{2}$ est racine de (1), montrer que nécessairement $a=b=c=0$

3. Montrer que quels que soient les nombres rationnels *a, b, c* : $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

B. Un espace vectoriel sur Q et un corps par-dessus le marché

Dans cette partie, on désigne par E l'ensemble des nombres réels de la forme $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ où a, b, c sont des nombres rationnels quelconques. L'addition notée + et la multiplication notée $\times$ des nombres de E sont celles des nombres réels, la multiplication externe notée . est celle d'un nombre de E par un nombre rationnel.

1. Montrer que $(E,\, +,\, .)$ est un espace vectoriel sur **Q** de dimension 3, une base étant $\left(\sqrt[3]{4},\, \sqrt[3]{2},\, 1\right)$

2. Montrer que l'ensemble $(E,\, +,\, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

3. Soit $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ un élément de E.

Montrer qu'il existe un élément $x\sqrt[3]{4}+y\sqrt[3]{2}+z$ de E tel que : $\left(a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c\right)\times\left(x\sqrt[3]{4}+y\sqrt[3]{2}+z\right)=1$ si et seulement si le triplet $(x,\, y,\, z)$ est solution rationnelle du système de trois équations linéaires : $\begin{cases} c\,x+b\,y+a\,z=0 \\ 2a\,x+c\,y+b\,z=0 \\ 2b\,x+2a\,y+c\,z=1 \end{cases}$. On désigne par M la matrice de ce système.

4.1. Justifier que quels que soient x, y, z réels :

$$x^3+y^3+z^3-3\,x\,y\,z=\frac{1}{2}(x+y+z)\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$$

4.2. En déduire que $\det(M)=0 \Leftrightarrow a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$ puis que tout élément non nul de E est inversible pour la multiplication interne de E.

Que dire de la structure algébrique de $(E,\, +,\, \times)$ **?**

2. Eléments de correction

A. La racine cubique de 2 est irrationnelle et n'est pas solution d'une équation au second degré à coefficients rationnels (non tous nuls).

1. Supposons que $\sqrt[3]{2}$ soit rationnel. Alors il existe deux entiers strictement positifs premiers entre eux p et q tels que : $\dfrac{p}{q}=\sqrt[3]{2}$, ce qui implique que p et q sont liés par la relation : $p^3=2q^3$. Le nombre entier p divise $2q^3$ et il est premier avec q donc, d'après le théorème de Gauss, il divise 2. Ou bien $p=1$ ce qui conduit à l'impasse $1=2q^3$, ou bien $p=2$ ce qui conduit à l'impasse $4=q^3$. L'hypothèse « $\sqrt[3]{2}$ rationnel » est donc à rejeter. Le réel $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.

2.1. Si $\sqrt[3]{2}$ est solution de (1) alors $\sqrt[3]{2}$ est aussi solution de l'équation $x\left(a x^2+b x+c\right)=0$ c'est-à-dire de $a x^3+b x^2+c x=0$. Mais le réel $\sqrt[3]{2}$ est par définition l'unique solution réelle de : $x^3-2=0$. Donc si $\sqrt[3]{2}$ est solution de $a x^3+b x^2+c x=0$, il est solution de $2a+b x^2+c x=0$

2.2. $\sqrt[3]{2}$ est une solution commune des deux équations : $\begin{cases} a x^2+b x+c=0 \\ b x^2+c x+2a=0 \end{cases}$. Ce nombre est solution de toute combinaison linéaire de ces équations, en particulier de : $b\left(a x^2+b x+c\right)-a\left(b x^2+c x+2a\right)=0$, c'est-à-dire de : $\left(b^2-a c\right)x+b c-2a^2=0$

2.3. Si $b^2-a c\neq 0$, $\sqrt[3]{2}$ serait solution d'une équation au premier degré à coefficients rationnels et s'exprimerait sous forme rationnelle : $\sqrt[3]{2}=\dfrac{2a^2-b c}{b^2-a c}$, hypothèse à rejeter puisque $\sqrt[3]{2}$ est rationnel. Dans l'hypothèse où $b^2-a c\neq 0$, le réel $\sqrt[3]{2}$ ne peut pas être solution de (1).

2.4. Si $b^2-a c=0$, alors l'équation (1) a pour discriminant $b^2-4a c=b^2-4b^2=-3b^2$. Le discriminant étant négatif ou nul, (1) ne peut avoir de racine réelle que si le discriminant est nul, donc si $b=0$. L'un au moins des coefficients a ou c est nul puisque alors $-a c=0$. Si $a=0$, alors aussi $c=0$, sinon (1) n'autait pas de solution. Si $c=0$, alors (1) s'écrit : $a x^2=0$ et $\sqrt[3]{2}$ ne peut en être solution que si $a=0$.

En résumé, $\sqrt[3]{2}$ ne peut être solution de (1) que si (1) est l'équation à coefficients nuls.

3. Il est trivial que $a=b=c=0 \Rightarrow a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$.

Réciproquement, si $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$: le nombre $\sqrt[3]{4}$ étant le carré de $\sqrt[3]{2}$, ce réel vérifie la relation $a\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+b\sqrt[3]{2}+c=0$; il est solution de : $a x^2+b x+c=0$ et d'après la question précédente, cela ne peut être le cas que si $a=b=c=0$. Il en résulte que : $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0 \Rightarrow a=b=c=0$

B. Un espace vectoriel sur Q et un corps par-dessus le marché

1. $(E, +, .)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $\{\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, 1\}$. À ce titre, E est le sous-espace vectoriel de **R** (considéré comme espace vectoriel sur **Q**) engendré par cette famille. Il s'agit d'un espace vectoriel dont $\{\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, 1\}$ est une famille génératrice. La partie **A** a montré que quels que soient les nombres rationnels a, b, c : $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$, la famille $\{\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, 1\}$ est une famille libre. Il s'agit par conséquent d'une base de E, et la dimension de E est égale à 3.

2. L'ensemble $(E, +)$ est sous-groupe additif de **R** mais rien ne prouve *a priori* que la multiplication des réels induit sur E une multiplication interne. C'est cette propriété qui justifiera pour l'ensemble E sa qualité de sous-anneau de **R.**

$$\left(a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c\right)\times\left(a'\sqrt[3]{4}+b'\sqrt[3]{2}+c'\right)=\left(a\,c'+b\,b'+c\,a'\right)\sqrt[3]{4}+\left(2\,a\,a'+b\,c'+c\,b'\right)\sqrt[3]{2}+\left(2\,a\,b'+2\,b\,a'+c\,c'\right).$$

Les nombres a, b, c, a', b', c' étant rationnels, il en est de même de chacun des nombres $\left(a\,c'+b\,b'+c\,a'\right)$; $\left(2\,a\,a'+b\,c'+c\,b'\right)$; $\left(2\,a\,b'+2\,b\,a'+c\,c'\right)$

Le produit de deux éléments de E est effectivement un élément de E, E est stable pour la multiplication $\times$. De ce fait, E est un sous-anneau de **R** et hérite naturellement des propriétés de commutativité et d'existence d'un neutre multiplicatif.

3. L'élément $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ de E est inversible si et seulement si il existe un élément $x\sqrt[3]{4}+y\sqrt[3]{2}+z$ de E tel que : $\left(a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c\right)\times\left(x\sqrt[3]{4}+y\sqrt[3]{2}+z\right)=1$

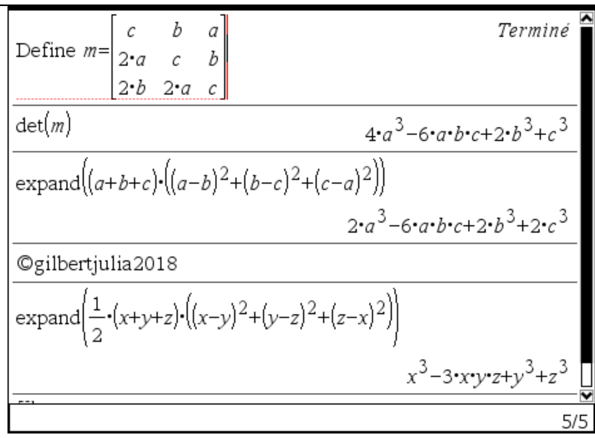
Compte tenu du calcul précédent une condition nécessaire et suffisante est que : $\left(a\,z+b\,y+c\,x\right)\sqrt[3]{4}+\left(2\,a\,x+b\,z+c\,y\right)\sqrt[3]{2}+\left(2\,a\,y+2\,b\,x+c\,z-1\right)=0$.

Compte tenu du **A.3, u**ne condition équivalente est que le triplet (x, y, z) soit solution rationnelle du système de trois équations linéaires : $\begin{cases} c\,x+b\,y+a\,z=0 \\ 2a\,x+c\,y+b\,z=0 \\ 2\,b\,x+2\,a\,y+c\,z=1 \end{cases}$. Tous les coefficients étant rationnels, si ce système a une solution, cette solution est rationnelle.

La matrice de ce système est la matrice $M=\begin{bmatrix} c & b & a \\ 2a & c & b \\ 2b & 2a & c \end{bmatrix}$.

Le déterminant de la matrice M est égal à : $\det(M)=4\,a^3+2\,b^3+c^3-6\,a\,b\,c$.

Un développement adéquat « justifie » l'identité **4.1**



4.2. Si on applique cette identité avec $x = a\sqrt[3]{4}$; $y = x = a\sqrt[3]{2}$; $z = c$ on obtient la relation :

$$\det(M) = 4a^3 + 2b^3 + c^3 - 6abc \underset{gilbertjulia2018}{=} \frac{1}{2}\left(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c\right)\left(\left(a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(b\sqrt[3]{2} - c\right)^2 + \left(c - a\sqrt[3]{4}\right)^2\right)$$

Ainsi $\det(M) = 0 \underset{gilbertjulia2018}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0 \\ ou\ bien \\ \left(a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(b\sqrt[3]{2} - c\right)^2 + \left(c - a\sqrt[3]{4}\right)^2 = 0 \end{cases}$.

Mais $\left(a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2}\right)^2 + \left(b\sqrt[3]{2} - c\right)^2 + \left(c - a\sqrt[3]{4}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a\sqrt[3]{4} - b\sqrt[3]{2} = b\sqrt[3]{2} - c = c - a\sqrt[3]{4} = 0$ (une somme de trois carrés est nulle si et seulement si chacun d'eux est nul) ce qui équivaut à : $a = b = c = 0$ c'est-à-dire à la nullité de $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$

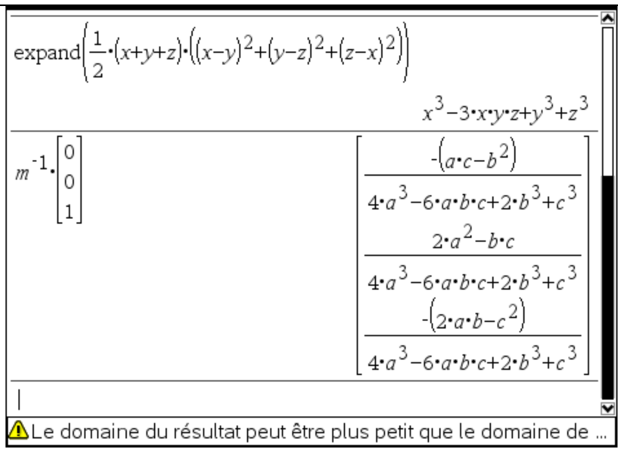
En fin de compte : $\det(M) = 0 \Leftrightarrow a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$

Autrement dit, pour tout élément $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ non nul de *E*, le système linéaire a un déterminant non nul et a donc une $_{gj}$ solution unique.

Tout élément non nul $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c$ de E a un inverse multiplicatif qui est :

$$\frac{1}{\det(M)}_{gjulia} \left(b^2 - ac\right)\sqrt[3]{4} + \left(2a^2 - bc\right)\sqrt[3]{2} + \left(c^2 - 2ab\right)$$

Tout élément non nul étant inversible pour la multiplication interne, *E* est un sous corps de **R**.



On pourrait vérifier que $E = Q\left(\sqrt[3]{2}\right)$ *est le plus petit sous-corps de* ***R*** *contenant la racine cubique de 2.*