

Points constructibles et nombres constructibles

Le cadre est le plan affine euclidien \mathcal{P} . On considère deux points distincts du plan O et I . La distance OI est prise comme unité (donc $OI = 1$ dans toute la suite), et on rapporte le plan à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ})$.

La notion de « point constructible à partir des points O et I » peut être définie comme suit :

Points constructibles à partir de deux points de base : « Les deux points distincts du plan O et I étant donnés, on se propose d'en construire d'autres qu'ils déterminent en n'usant que de la règle et du compas, la règle ne devant servir qu'à joindre (tracer une droite) deux points donnés ou précédemment obtenus, le compas ne devant servir qu'à tracer un cercle dont le centre est un point donné ou déjà obtenu et dont le rayon est la distance de deux points donnés ou déjà obtenus. »

- On dira d'un segment qu'il est « constructible » si ses deux extrémités sont des points constructibles.
- On dira d'une droite qu'elle est « constructible » si elle passe par deux points constructibles.
- On dira d'un cercle qu'il est « constructible » si un de ses diamètres est constructible, ou bien si son centre et un point par lequel il passe sont tous deux constructibles.

On admettra sans démonstration que :

Le milieu d'un segment constructible est constructible.

Une parallèle et une perpendiculaire à une droite constructible passant par un point constructible sont constructibles. Les constructions géométriques de ces objets ne sont pas demandées.

Nombres constructibles : Un réel x sera dit constructible s'il est abscisse d'un point constructible dans le repère orthonormal $(O, \vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j})$.

On désignera par E l'ensemble des nombres réels constructibles.

Partie 1. Quelques fondamentaux.

1.1. Montrer que tout point de \mathcal{P} à coordonnées entières dans le repère $(O ; \vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ})$ est constructible.

1.2. En déduire qu'il en est de même de tout point de coordonnées $\left(m + \frac{1}{2} ; n + \frac{1}{2}\right)$ où m et n sont deux entiers.

2. Constructions de points constructibles à l'aide de configuration connues.

2.1. À l'aide de configurations de Thalès :

2.1.1. Soit J un point constructible autre que O et I . Construire un point K vérifiant $OJ \times OK = OI^2$.

* Ce point noté malencontreusement J n'a rien à voir avec le point J introduit pour le « repère orthonormal ». Il en sera de même dans 2.2. Tenir compte de ce télescopage de notations, je ne le corrige pas ...

2.1.2. Soient J_1 et J_2 deux points constructibles autres que O et I . Construire un point M tel que $OI \times OM = OJ_1 \times OJ_2$

2.2. A l'aide d'une configuration de triangle rectangle :

Soit J un point constructible autre que O et I . Construire un point L vérifiant : $OL^2 = OI \times OJ$. (On pourra supposer, sans restreindre la généralité, que J est situé sur (OI) et que J, O, I sont alignés dans cet ordre)

3. Structure algébrique de l'ensemble des nombres constructibles.

Montrer que \mathbf{E} est un sous corps de \mathbf{R} contenant \mathbf{Q} et stable par racines carrées (c'est à dire que, si $x \geq 0$ appartient à \mathbf{E} ; \sqrt{x} aussi).

Partie 2. Une construction classique : celle du pentagone régulier.

Dans cette partie, on se propose de construire à la règle et au compas les 4 autres sommets du pentagone régulier de centre O et de sommet I . On prouvera aussi que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont des nombres constructibles, de même d'ailleurs que les sinus de ces nombres.

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère le nombre : $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$

1. Prouver que : $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$

2. On pose : $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$. Calculer $u + v$ et $u \times v$ et en déduire que u et v sont solution d'une équation au deuxième degré que l'on résoudra.

3. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

4. À la page 135 Terracher 1S, on propose cette construction :

« Dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i} = \overrightarrow{OI}, \vec{j} = \overrightarrow{OJ})$ on considère le cercle Γ de centre O passant par I et le point $K(0, 1/2)$. Le cercle de centre K passant par I coupe la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $-\overrightarrow{OJ}$ en L . Le cercle de centre I passant par L coupe Γ en A et en B . »

Montrer que A et B sont effectivement deux des sommets du pentagone régulier cherché et achever la construction.

Partie 3. Complément d'information sur les nombres constructibles et contre exemple.

K est un sous-corps de \mathbb{R} contenant \mathbb{Q} .

Extensions quadratiques.

On dit que $K[\alpha]$ est une extension quadratique de K si α est algébrique de degré 2 sur K .

On montre qu'il existe alors un élément r de K tel que : $K[\alpha] = K[\sqrt{r}]$

Une caractérisation des nombres constructibles.

Une suite finie $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ de sous-corps de \mathbb{R} est un tour d'extension quadratique de \mathbb{Q} si :

- $\mathbb{Q} = K_0$
- Pour tout i tel que $0 \leq i \leq n - 1$: K_{i+1} est une extension quadratique de K_i

(Chaque corps est une extension quadratique du précédent, le corps de départ étant \mathbb{Q})

On montre que α est constructible si et seulement si il existe un tour d'extension quadratique de \mathbb{Q} , soit $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n$ tel que α appartient à K_n

Il en résulte que si α est constructible, alors son degré sur \mathbb{Q} est une puissance de 2.

Dans cette partie, on se propose de démontrer que cette condition n'est pas suffisante.

On considère le polynôme P défini par : $P(X) = X^4 - X - 1$

1.1. Montrer que ce polynôme a exactement deux racines réelles α et β ($\alpha < \beta$) que l'on situera par rapport aux nombres $-1, 0$, et 1 .

1.2. On décompose P dans \mathbb{R} en : $P(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ avec $\begin{cases} c = -\alpha - \beta \\ d = \alpha \times \beta \end{cases}$

Etablir que b et d sont solutions de : $T^2 + a^2 - 1 = 0$ et exprimer b en fonction de a^2 .

2. Etablir que : $a \times (2b + a^2) = 1$ puis que a^2 est solution de : $T^3 + 4T - 1 = 0$

3. Montrer que le polynôme $T^3 + 4T - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ puis que a n'est pas constructible.

4. Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. En déduire que l'un au moins des nombres α ou β est de degré 4 sur \mathbb{Q} et n'est pas constructible.

(Bien que de degré 4 sur \mathbb{Q} , ce nombre n'appartient donc pas à un tour d'extension quadratique de \mathbb{Q})

Éléments de correction

Partie 1. Points constructibles et nombres constructibles.

1.1. Notons $Ox = (OI)$ et Oy les deux axes de coordonnées.

Soit m un entier naturel. Supposons les points H_m et H_{m-1} de Ox d'abscisses m et $m - 1$ construits. Le point d'abscisse $m + 1$ de Ox est l'autre point d'intersection de cet axe avec le cercle de centre H_m passant par H_{m-1} . Il est donc constructible.

Les points $H_0 = O$ et $H_1 = I$ étant les points de base, on en déduit que H_m est constructible pour tout entier naturel m . Si m est un entier négatif, le point d'abscisse m de Ox est l'autre point d'intersection avec Ox du cercle de centre O passant par H_{-m} .

Si A est un point du plan de coordonnées entières (m, n) , il est l'un des deux points d'intersection du cercle de centre H_m passant par H_{m+n} avec la perpendiculaire à Ox passant par H_m (l'autre point d'intersection étant le point de coordonnées $(m ; -n)$ d'ailleurs).

1.2. Le point de coordonnées $\left(m + \frac{1}{2} ; n + \frac{1}{2}\right)$ où m et n sont deux entiers est milieu du segment d'extrémités le point de coordonnées (m, n) et celui de coordonnées $(m + 1, n + 1)$, tous eux constructibles d'après **1.1**.

<p>2.1.1. Dans cette configuration de Thalès :</p> $\frac{OJ}{OU} = \frac{OI}{OK}$ <p>et donc $OJ \times OK = OI \times OU$ Du fait que $OI = OU$, on obtient bien $OJ \times OK = OI^2$</p>	
<p>2.1.2. Dans celle-ci : $\frac{OM'}{OJ_2} = \frac{OJ_1}{OU_1}$ et donc :</p> $OM' \times OU_1 = OJ_1 \times OJ_2$ <p>Du fait que $OU_1 = OI$, on obtient bien $OM' \times OI = OJ_1 \times OJ_2$. Ce point M' peut ensuite être « ramené » sur Ox en M à l'aide du compas.</p>	
<p>Le point J a été « ramené » en J' sur (OI), si besoin est. Dans le triangle $IJ'L$ rectangle en L, (OL) est la hauteur issue de L. D'après les relations métriques dans le triangle rectangle :</p> $OL^2 = OI \times OJ'$ <p>Comme $OJ' = OJ$, on obtient bien $OL^2 = OI \times OJ$ Ce point L peut ensuite être « ramené » sur Ox en L'.</p>	

3. Si x et y sont constructibles, $-x$ et $x + y$ le sont aussi par des constructions évidentes. \mathbf{E} est sous-groupe additif de \mathbf{R} .

Les constructions précédentes 2.1.1. et 2.1.2. montrent que $1/y$ et que x/y sont constructibles si $y \neq 0$. \mathbf{E}^* est donc sous-groupe multiplicatif de \mathbf{R}^* . Il en résulte que \mathbf{E} est un sous corps de \mathbf{R}

On a également montré que tout entier relatif appartenait à \mathbf{E} . L'ensemble \mathbf{Q} étant le plus petit sous corps de \mathbf{R} contenant \mathbf{Z} , on en déduit que \mathbf{E} contient \mathbf{Q} .

Enfin, la construction 2.2 a démontré que, si un segment de longueur donnée était constructible, on pouvait en construire un dont la longueur en était la racine carrée. On en déduit que si un nombre positif x est constructible, sa racine carrée l'est aussi.

Finalement, \mathbf{E} est un sous corps de \mathbf{R} stable pour les racines carrées.

Partie 2.

$$1. \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

$$\omega^5 = \exp 5\left(\frac{2i\pi}{5}\right) = \exp(2i\pi) = 1 : \omega \text{ est une racine cinquième de l'unité autre que } 1.$$

C'est une racine du polynôme $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ autre que 1.

Elle est racine de : $(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ c'est-à-dire que $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

On tiendra compte désormais que $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega = -1$ et que : $\omega^5 = 1$

$$2. \text{ On pose : } u = \omega^4 + \omega ; \quad v = \omega^3 + \omega^2.$$

$$u + v = \omega^4 + \omega + \omega^3 + \omega^2 = -1$$

$$u \times v = \omega^7 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^3 = \omega^2 + \omega^4 + \omega + \omega^3 = -1$$

3. Le calcul de u et de v se ramène au calcul de deux nombres dont on connaît la somme s et le produit p .

Ils sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$ en l'occurrence de $X^2 + X - 1$.

Il s'agit de $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (racine positive) et de $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ (racine négative)

Les racines cinquièmes de l'unité étant conjuguées deux à deux : $u = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

tandis que $v = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Le nombre u est la racine positive car $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ et v la racine négative car $\pi > \frac{4\pi}{5} > \frac{\pi}{2}$

Conclusion : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$, nombres sont constructibles car $\sqrt{5}$ est constructible.

La construction Terracher.

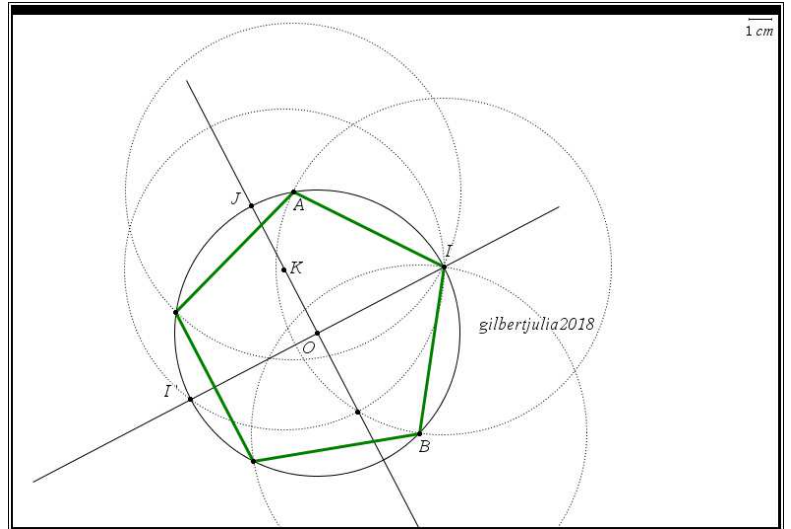
$$IK^2 = \frac{5}{4} \text{ donc } IK = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ et } IK =_{sj} \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Pour justifier que A et B sont des sommets du pentagone cherché, on peut prouver que les angles géométriques IOA et IOB mesurent $2\pi/5$.

On peut calculer leur cosinus par la formule d'Al-Kashi, dans le triangle OIA par exemple. C'est

$$\frac{OI^2 + OA^2 - IA^2}{2OI \cdot OA} = \frac{1 + 1 - (3 - \sqrt{5})/2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

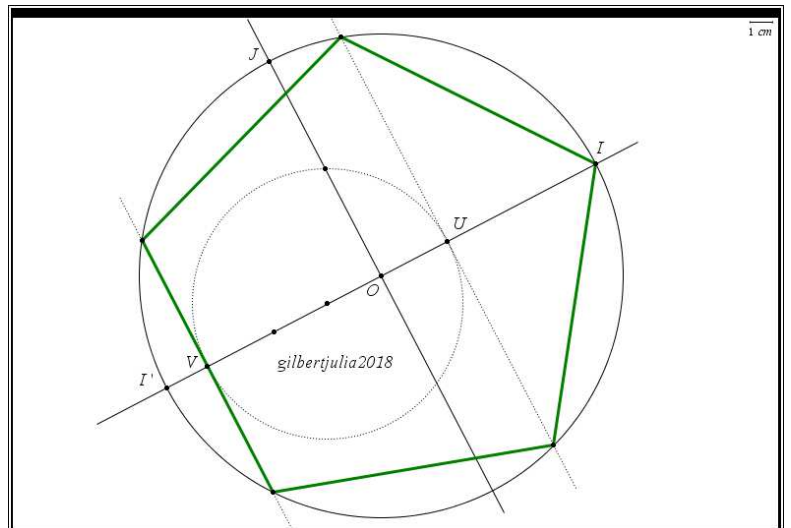
C'est bien $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.



La figure ci-contre propose une autre construction que celle de Terracher :

On a utilisé le milieu de $[OJ]$ et le point d'abscisse $-1/4$ (obtenu à partir de I' par deux milieux consécutifs) puis tracé le cercle de centre $(-1/4, 0)$ et passant par $(0, 1/2)$.

Il coupe (OI) en deux points U et V qui ont pour abscisses $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$



Partie 3. Contre exemple.

1.1. Si P est le polynôme $P(X) = X^4 - X - 1$, une brève étude de la fonction polynomiale $x \mapsto x^4 - x - 1$ montre que P a deux racines réelles, une α entre - 1 et 0 et une autre β entre 1 et 2 (théorème des valeurs intermédiaires qu'on applique d'une part sur $[-1, 0]$ et d'autre part sur $[1, 2]$).

Si α et β sont ces deux racines réelles, P admet dans $\mathbf{R}[X]$ une décomposition du type : $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X^2 + aX + b)$ où le polynôme du second degré n'a pas de racine réelle.

Les coefficients sont ici des nombres réels - tout polynôme de $\mathbf{R}[X]$ admet une décomposition en produit de polynômes du premier ou du deuxième degré - . La suite va montrer que certains d'entre eux au moins ne sont pas des rationnels

C'est à dire : $P(X) = (X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha.\beta)(X^2 + aX + b) = (X^2 + cX + d)(X^2 + aX + b)$
 (avec $c = -(\alpha + \beta)$; $d = \alpha.\beta$)

Des inégalités $-1 < \alpha < 0$; $1 < \beta < 2$, il résulte que $0 < \alpha + \beta < 2$; $\alpha.\beta < 0$.
 Donc $c < 0$; $d < 0$

1.2. En développant :

$$(X^2 + cX + d)(X^2 + aX + b) = X^4 + (a + c)X^3 + (b + d + a.c)X^2 + (ad + bc)X + bd$$

Par identification :
$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + a.c = 0 \\ ad + bc = -1 \\ bd = -1 \end{cases}$$
 ; On en déduit que : $c = -a$ puis que : $b + d = -a^2$

On "connaît" la somme $s = -a^2$ et le produit $p = -1$ des deux nombres b et d :
 Ils sont donc solutions de l'équation $T^2 - sT + p = 0$ c'est à dire $T^2 + a^2T + 1 = 0$

Comme d est < 0 (et donc $b > 0$ puisque leur produit est négatif) il en résulte que :

$$b = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4}}{2} \quad (d \text{ valant l'expression conjuguée})$$

2. Il reste une équation à exploiter. $ad + bc = a(d - b) = -1$

Mais $d - b = \frac{-a^2 - \sqrt{a^4 + 4}}{2} - \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4}}{2} = -\sqrt{a^4 + 4}$. Le nombre a est solution de l'équation :
 $-a\sqrt{a^4 + 4} = -1$, donc, en élevant au carré de : $a^2(a^4 + 4) = 1$

Il s'agit d'une équation algébrique : $a^6 + 4a^2 - 1 = 0$

Ce qui prouve que a^2 est racine du polynôme $T^3 + 4T^2 - 1$.

3. Le polynôme $T^3 + 4T - 1$ étant du troisième degré, s'il était réductible sur $\mathbf{Q}[X]$, aurait une racine rationnelle que l'on pourrait écrire sous forme irréductible p/q .

Les entiers p et q vérifieraient : $p^3/q^3 + 4p/q - 1 = 0$ et donc : $p^3 + 4pq^2 - q^3 = 0$ ou encore : $q(q^2 - 4pq) = p^3$.

Il en résulterait que q diviserait p^3 et ne serait pas premier avec p à moins d'être égal à 1 ou à -1. Mais dans ce dernier cas, ce polynôme aurait une racine entière, ce qui n'est pas.

L'hypothèse est à rejeter : le polynôme est irréductible sur $\mathbf{Q}[X]$ et il s'agit donc du polynôme minimal de a^2 . Comme ce polynôme minimal est de degré 3, a^2 ne peut pas être constructible. Par contraposition, a ne peut pas l'être non plus.

4. La question précédente a montré au passage que le polynôme P n'était pas un produit de deux polynômes du deuxième degré à coefficients rationnels.

Il reste l'hypothèse où l'une des racines α ou β serait une racine rationnelle. Même démonstration que au dessus. On pourrait l'écrire sous forme irréductible p/q . Les entiers p et q vérifieraient : $p^4/q^4 - p/q - 1 = 0$ et donc : $p^4 - pq^3 - q^4 = 0$ ou encore : $q(q^3 + pq^2) = p^4$. Le nombre q divisant p^4 ne serait pas premier avec p , à moins d'être égal à 1 ou à -1, mais comme on n'a pas trouvé de racine entière, ce dernier cas est exclu.

Le polynôme P est irréductible sur \mathbf{Q}

Le nombre a n'étant pas constructible, une au moins des racines α ou β ne l'est pas, sinon a le serait comme somme de nombres constructibles.

Il existe une racine d'un polynôme irréductible de degré 4 qui n'est pas constructible.

La condition pour qu'un nombre soit constructible : « le degré sur \mathbf{Q} est une puissance de 2 » est certes une condition nécessaire, mais elle n'est pas suffisante.