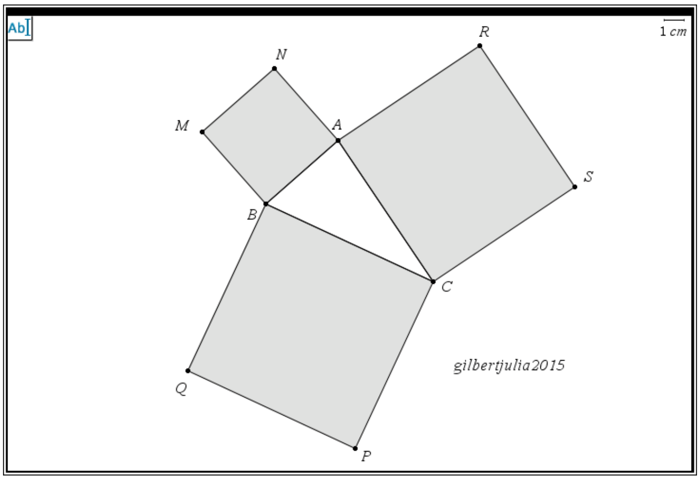
Les configurations de Vecten[1] et de Van Aubel[2]

Voici l'étude de deux configurations classiques, celle de Vecten et celle de Van Aubel.

À l'exception du tout début de la première partie, ces configurations sont étudiées à l'aide de l'outil des nombres complexes.

J'ai choisi cette option car elle me semble assez bien mettre en évidence les analogies entre les deux configurations. On retrouvera souvent les mêmes méthodes. Beaucoup de résultats de la partie « Vecten » peuvent être repris avec des changements minimes dans la partie « Van Aubel ».

Dans le plan euclidien, la figure de Vecten est constituée d'un triangle *ABC* et de trois carrés *ABMN* ; *BCPQ*, *CARS* construits sur les côtés du triangle et extérieurement au triangle.



Cette configuration, partielle (deux carrés seulement extérieurs à deux des côtés du triangle) ou complète, a jadis donné lieu à de nombreux exercices de terminale scientifique, souvent repris à l'oral 2 par les candidats au CAPES des années 2000 (l'exercice 62 page 83 du Terracher TS Spé édition 1994, par exemple, connut en son temps une certaine célébrité).

La configuration de Vecten reste toujours d'actualité, et le lecteur pourra la retrouver avec un peu de perspicacité dans tous les bons manuels de géométrie des dernières classes de lycée.

On supposera dans les parties 1 et 2 le plan orienté et *ABC* de sens direct (les carrés *ABMN*, *BCPQ* lorsqu'il apparaît, et *CARS* sont de ce fait de sens indirect).

Petit rappel à toutes fins utiles : Soient A, M, M' trois points d'affixes respectives a, z, z', le point M étant distinct de A.

Si $\dfrac{z'-a}{z-a} = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ *alors :* $\begin{cases} AM' = AM \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \theta \quad (2\pi) \end{cases}$ (*interprétation géométrique classique du module et d'un argument d'un nombre complexe*)

---

[1] On sait peu de choses sur le personnage, pas même son prénom. Il se dit qu'il fut professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Nîmes dans les années 1816 / 1817, en même temps que Joseph Diez Gergonne connu quant à lui pour être fondateur des *Annales de mathématiques pures et appliquées* parues entre 1810 et 1832, et dans lesquelles Vecten publia entre autres écrits une étude sur la figure qui porte désormais son nom.

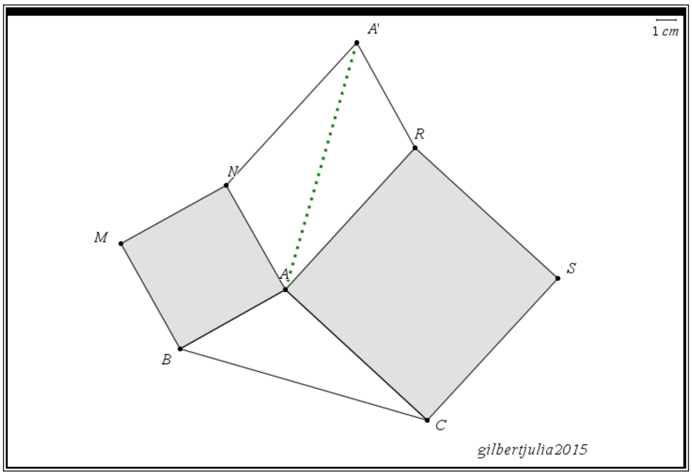
[2] Henri Hubert Van Aubel (1830-1906) fut professeur de mathématiques dans la ville flamande d'Antwerpen.

Partie 1

D'après sujet Japon 1994 (Annales de Bac).

Dans cette partie, on considère pour le moment une figure partielle, avec uniquement les carrés *ABMN* et *CARS*.

On construit le parallélogramme *ANRA'* et on se propose de démontrer de deux façons que (*AA'*) est une hauteur du triangle *ABC* et que $AA' = BC$



1. *Par des méthodes de géométrie des configurations*

1.1. *L'orthogonalité par le produit scalaire* : Calculer $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}$ en décomposant chacun des deux vecteurs par la relation de Chasles.

1.2. *L'égalité* : par exemple en développant AA'^2 comme un carré scalaire.

2. *Utilisation des nombres complexes.*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct et est assimilé au plan complexe. On note *a, b, c* les affixes des points *A, B, C*.

2.1. Calculer les affixes de *N* et *R* puis celle de *A'* en fonction de *a*, *b, c*.

2.2. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ puis conclure.

3. On considère désormais la figure complète. On construit les trois parallélogrammes *NARA'*, *QBMB'*, *SCPC'*.

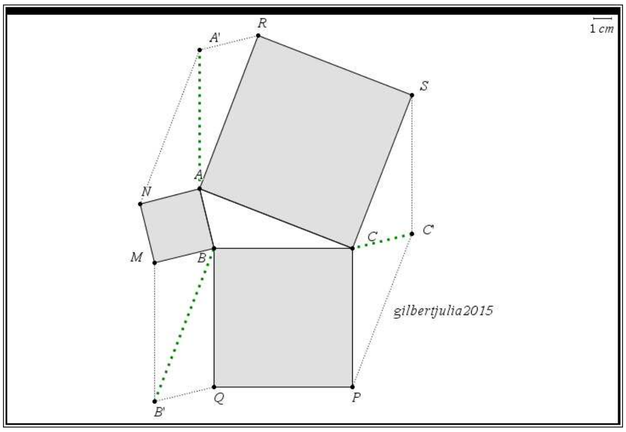
3.1. Justifier que les droites (*AA'*), (*BB'*), (*CC'*) sont concourantes.

3.2. Démontrer que le triangle *A'B'C'* a le même centre de gravité que le triangle *ABC*.

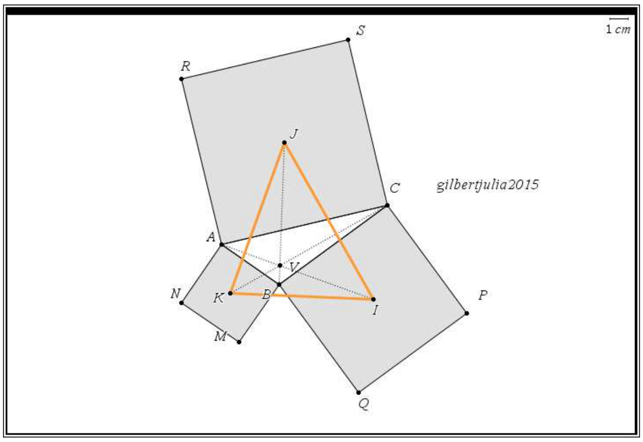
3.3. Démontrer que :

$$NR^2 + QM^2 + SP^2 = 3\left(AB^2 + BC^2 + CA\right)$$

gjulia2015



Partie 2. Triangle de Vecten et point de Vecten



On note I, J, K les centres des carrés $BCPQ$, $CARS$, $ABMN$ respectivement. Le triangle[3] IJK est appelé « triangle de Vecten » associé au triangle ABC.

1. On note que I est image de B, J est image de C, K est image de A par des similitudes de centres respectifs C, A, B qui ont toutes les trois même rapport et même angle (que l'on précisera).
En exploitant cette remarque, exprimer les affixes u de I, j de J et k de K en fonction des affixes a, b, c des points A, B, C.

2. Montrer que les triangles IJK et ABC ont le même centre de gravité.

3. Soit X le milieu du segment $[BC]$ et x son affixe. Calculer le rapport $\dfrac{k-x}{j-x}$ et en déduire la nature géométrique du triangle XKJ. En déduire deux autres propriétés analogues avec les milieux des deux autres côtés.

4. Calculer le rapport $\dfrac{k-j}{u-a}$ $_{gjulia2015}$. En déduire que (KJ) et (AI) sont perpendiculaires ainsi qu'une propriété métrique entre AI et KJ). Etablir que (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en un point dont on précisera les caractéristiques ainsi que des propriétés métriques entre les distances AI, BJ, CK et les longueurs des côtés du triangle IJK.

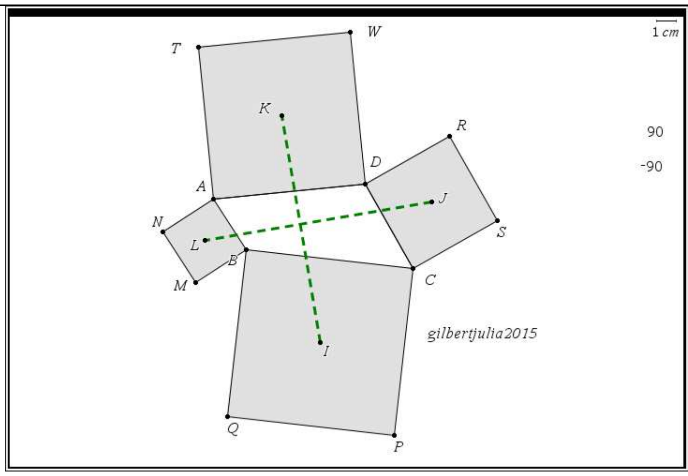
[3] Pour ceux et celles qui ont quelque scrupule à parler de « triangle » sans justifier le non alignement des sommets, voir le problème annexe

Partie 3. Configuration de Van Aubel

On se place dans le cadre d'un plan euclidien orienté, assimilé au plan complexe.

ABCD est un quadrilatère. On construit les quatre carrés *ABMN*, *BCPQ*, *CDRS*, *DATW* de sorte que ces carrés soient tous des carrés indirects.

On note *L, I, J, K,* les centres des carrés respectivement *ABMN, BCPQ, CDRS, DATW*.



1. Exprimer les affixes *u* de *I*, *j* de *J* , *k* de *K* et *l* de *L* en fonction des affixes *a, b, c, d* des points *A, B, C, D*.

2. Montrer que les *gjulia*2015 quadrilatères *IJKL* et *ABCD* ont le même isobarycentre.

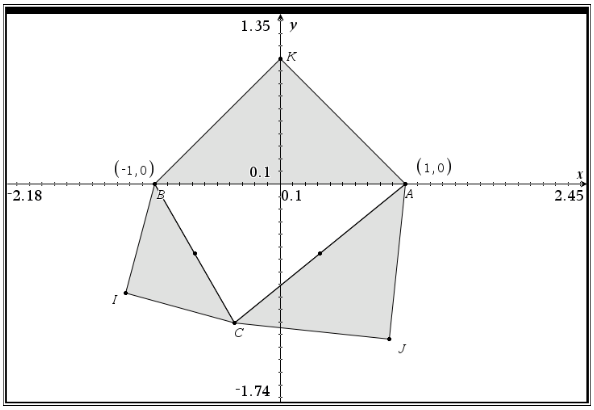
3. Montrer que les droites (*IK*) et (*JL*) sont perpendiculaires et que $IK = JL$.

4. Montrer que *IJKL* est un carré si et seulement si *ABCD* est un parallélogramme.

Annexe : Un problème de lieu

Dans le problème précédent, nous avons admis que, quel que soit le triangle ABC initial, les centres I, J, K des trois carrés construits extérieurement étaient des points non alignés. Ce problème annexe a pour objectif de préciser des conditions d'alignement de ces points.

Dans le plan complexe, A est le point d'affixe 1, B est le point d'affixe – 1, et C est un point du plan d'affixe $c = x + i\,y$ quelconque.



K est le point d'affixe i, de sorte que le triangle ABI est un triangle rectangle isocèle indirect.

On construit les points I et J de sorte que les triangles BCI et CAJ soient eux aussi rectangles isocèles indirects.

On se demande où doit se trouver C pour que I, J, K soient des points alignés.

1. Exprimer les affixes u de I et v de J en fonction de l'affixe c de C.

2. En déduire les coordonnées de chacun des points I et J en fonction des coordonnées x et y de C.

3. Montrer que I, J, K sont alignés si et seulement si C appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Eléments de correction.

Partie 1.

1. $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AR}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Compte tenu de l'orientation choisie et de la configuration des deux carrés construits extérieurement : $\begin{cases} AN=AB \\ \left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$ et $\begin{cases} AR=AC \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AR}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$.

Il en résulte que les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AB}$ d'une part, $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AC}$ d'autre part, sont des vecteurs orthogonaux et que : $\left(\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)+\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)-\dfrac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}\right)\ (2\pi)$.

Ces deux angles orientés étant égaux, ils ont le même cosinus.

$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AR}.\overrightarrow{AB}=AN.AC\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right)-AR.AB.\cos\left(\overrightarrow{AR},\overrightarrow{AB}\right)=0$

Ce qui prouve l'orthogonalité des deux vecteurs.

La droite (*AA'*) est la perpendiculaire en *A* à (*BC*), c'est la hauteur issue de *A* du triangle *ABC*.

1.2. $AA'^2=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AR}\right)^2=AN^2+AR^2+2\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AR}$

Or : $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AR}\right)=\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AR}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\dfrac{\pi}{2}=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\pi\ (2\pi)$.

Les angles orientés $\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AR}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ont des cosinus opposés.

$AA'^2=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AR}\right)^2=AB^2+AC^2+2AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AR}\right)=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

En conséquence : $AA'^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=BC^2$. Ce qui prouve que $AA'=BC$.

On note au passage que, *ABC* étant un triangle, *B* est distinct de *C* donc *A'* est distinct de *A*. Il est légitime de parler de « la droite (*AA'*) »

2. Dans toute la suite, on note systématiquement par des petites lettres les affixes des différents points de la figure (sauf plus tard dans les parties 2 et 3 le point *I* dont on baptisera *u* l'affixe puisque *i* est une notation interdite …).

N est image de *B* par la rotation de centre *A* et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ tandis que *R* est image de *C* par la rotation de centre *A* et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$: $\begin{cases} n-a=-i(b-a) \\ r-a=i(c-a)\end{cases}$.

Du fait que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AR}$: $a'-a=(n-a)+(r-a)=i(c-b)$, ce qui exprime que : $\begin{cases} |a'-a|=|c-b| \\ \arg(c-b)=\dfrac{\pi}{2}+\arg(a'-a)\end{cases}$ et s'interprète géométriquement par : $\begin{cases} AA'=BC \\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AA'}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)\end{cases}$;

Quant à l'expression de *a'* en fonction de *a*, *b*, *c*, c'est : $a'=a-ib+ic$

3. Par simple permutation circulaire des notations : $\begin{cases} a'=a-ib+ic \\ b'=b-ic+ib \\ c'=c-ia+ic\end{cases}$

3.1. De manière analogue, les deux autres hauteurs de *ABC* sont (*BB'*) et (*CC'*)
En tant que hauteurs du triangle *ABC*, (*AA'*), (*BB'*), (*CC'*) concourent à l'orthocentre du triangle *ABC*.

3.2. en ajoutant membre à membre les expressions de a’, b’ c’ : $a'+b'+c'=a+b+c$. Les deux triangles *ABC* et *A’B’C’* ont le même centre de gravité, d’affixe : $\frac{a'+b'+c'}{3}=\frac{a+b+c}{3}$

3.3. (*NR*), (*MQ*) et (*PS*) sont diagonales de parallélogrammes donc médianes des triangles « demi parallélogrammes » *NAA’*, *QBB’*, *SCC’*. Les segments [*MR*], [*QM*], [*SP*] ont pour longueur deux fois la longueur des médianes issues, respectivement, de *R*, *Q* et *S* de ces triangles.

Le carré de la longueur de la médiane issue de *N* dans *NAA’*est : $\frac{1}{2}AN^2+\frac{1}{2}NA'^2-\frac{1}{4}AA'^2$ (théorème d’Apollonius) soit $\frac{1}{4}\left(2AB^2+2AC^2-BC^2\right)$ puisque $AA'=BC$, $AN=AB$ et $NA'=AR=AC$.

Ainsi : $NR^2=2AB^2+2AC^2-BC^2$.

On dispose par permutation circulaire des notations de deux autres relations analogues. Il suffit alors d’additionner membre à membre les trois relations.

Partie 2

1. Compte tenu des propriétés usuelles d’un carré et du choix d’orientation de la figure :

Le centre *I* du carré *BCPQ* est l’image de *B* par la similitude de centre *C*, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d’angle $+\frac{\pi}{4}$.

Le centre *J* du carré *CARS* est l’image de *C* par la similitude de centre *A*, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d’angle $+\frac{\pi}{4}$.

Le centre *K* du carré *ABMN* est l’image de *A* par la similitude de centre *B*, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d’angle $+\frac{\pi}{4}$.

Ces trois similitudes ont même rapport et même angle, leur traduction complexe est associée au complexe de module $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d’argument $+\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire au nombre complexe $\frac{1}{2}(1+i)$.

Si on note respectivement *u*, *j*, *k* les affixes de *I*, *J*, *K* :

$$\begin{cases} u-c=\frac{1}{2}(1+i)(b-c) \\ j-a=\frac{1}{2}(1+i)(c-a) \\ k-b=\frac{1}{2}(1+i)(a-b) \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} u=\frac{1}{2}(1+i)b+\frac{1}{2}(1-i)c \\ j=\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)a \\ k=\frac{1}{2}(1+i)a+\frac{1}{2}(1-i)b \end{cases}$$

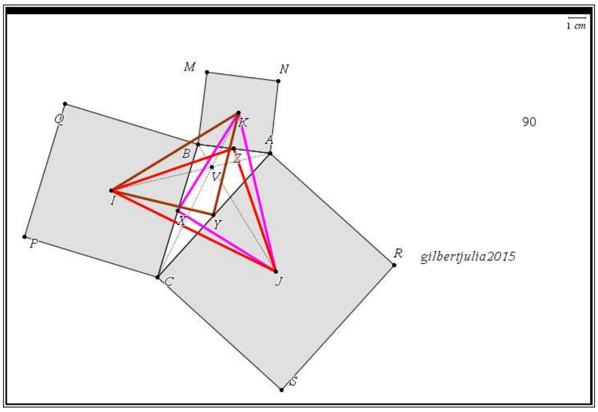
2. En additionnant les expressions de *u, j, k* en fonction de *a, b, c* on obtient que : $u+j+k=a+b+c$.

Le centre de gravité des deux triangles est le même point, d’affixe $\frac{a+b+c}{3}=\frac{u+j+k}{3}$

3. $$\begin{cases} j-x=\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(b+c)=\frac{1}{2}\left((1-i)a-b+ic\right) \\ k-x=\frac{1}{2}(1+i)a+\frac{1}{2}(1-i)b-\frac{1}{2}(b+c)=\frac{1}{2}\left((1+i)a-ib-c\right) \end{cases}.$$

$\dfrac{k-x}{j-x}=\dfrac{(1+i)a-ib-c}{(1-i)a-b+ic}=\dfrac{i((1-i)a-b+ic)}{(1-i)a-b+ic}=i$ ce qui s'interprète géométriquement par : $\begin{cases} XJ = XK \\ \left(\overrightarrow{XK},\overrightarrow{XJ}\right)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ c'est-à-dire que le triangle *XJK* est un triangle rectangle isocèle direct.

On montrerait de même que, si *Y* et *Z* sont les milieux respectifs de [*CA*] et [*AB*], les triangles *YKI* et *ZIJ* sont des triangles rectangles isocèles directs.



3. Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour affixe $u-a=-a+\frac{1}{2}(1+i)b+\frac{1}{2}(1-i)c$ tandis que le vecteur $\overrightarrow{JK}$ a pour affixe $k-j=\frac{1}{2}(1+i)a+\frac{1}{2}(1-i)b-\left(\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)a\right)$ $_{gjulia2015}$ $=i\,a+\frac{1}{2}(1-i)b-\frac{1}{2}(1+i)c$.

On note que *A* et *I* sont nécessairement distincts puisque *IBC* est un triangle rectangle isocèle indirect, tandis que *ABC* est un triangle de sens direct par hypothèse. Donc $u-a\neq 0$

Du fait que : $\frac{1}{2}(1-i)=-i\times\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)$; $\frac{1}{2}(1-i)=i\times\left(\frac{1}{2}(1-i)\right)$, on obtient la relation : $k-j=-i\left(a+\frac{1}{2}(1+i)b+\frac{1}{2}(1-i)c\right)=-i\,(u-a)$, soit : $\dfrac{k-j}{u-a}=-i$, ce qui s'interprète géométriquement par : $_{gjulia2015}$ $\begin{cases} AI = JK \\ \left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{JK}\right)=-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$. Les droites (*AI*) et (*JK*) sont perpendiculaires c'est-à-dire que (*AI*) est la hauteur issue de *I* du triangle *IJK*. En prime, $AI = JK$

De même, (*BJ*) et (*CK*) sont les deux autres hauteurs du triangle *IJK*. Les trois droites (*AI*), (*BJ*) et (*CK*) sont concourantes à l'orthocentre du triangle *IJK* et d'un point de vue métrique : $BJ = KI$; $CK = IJ$.

Le point de Vecten *V* du triangle *ABC* est l'orthocentre du triangle *IJK*.

Partie 3

1. On utilise une remarque analogue à celle de la partie 2 en considérant maintenant quatre similitudes :

Le centre I du carré $BCPQ$ est l'image de B par la similitude de centre C, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre J du carré $CDRS$ est l'image de C par la similitude de centre D, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre K du carré $DATW$ est l'image de D par la similitude de centre A, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre L du carré $ABMN$ est l'image de A par la similitude de centre B, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Si on note respectivement u, j, k, l les affixes de I, J, K, L :

$$\begin{cases} u-c=\dfrac{1}{2}(1+i)(b-c) \\ j-d=\dfrac{1}{2}(1+i)(c-d) \\ k-a=\dfrac{1}{2}(1+i)(d-a) \\ l-b=\dfrac{1}{2}(1+i)(a-b) \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} u=\dfrac{1}{2}(1+i)b+\dfrac{1}{2}(1-i)c \\ j=\dfrac{1}{2}(1+i)c+\dfrac{1}{2}(1-i)d \\ k=\dfrac{1}{2}(1+i)d+\dfrac{1}{2}(1-i)a \\ l=\dfrac{1}{2}(1+i)a+\dfrac{1}{2}(1-i)b \end{cases}$$

2. En additionnant membre à membre les expressions de u, j, k, l on obtient : $u+j+k+l=a+b+c+d$.

Les deux quadrilatères ont pour isobarycentre le même point d'affixe $\dfrac{u+j+k+l}{4}=\dfrac{a+b+c+d}{4}$.

3. $\begin{cases} k-u=\dfrac{1}{2}(1+i)(d-b)+\dfrac{1}{2}(1-i)(a-c) \\ l-j=\dfrac{1}{2}(1+i)(a-c)+\dfrac{1}{2}(1-i)(b-d) \end{cases}$. Ainsi : $l-j=\dfrac{1}{2}i\,\big((1-i)(a-c)+(1+i)(d-b)\big)=i\,(k-u)$ et :

$\dfrac{l-j}{k-u}=i$ ce qui s'interprète géométriquement par : $\begin{cases} IK=JL \\ \left(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{JL}\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Les deux droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires et les deux segments $[IK]$ et $[JL]$ sont de même longueur.

Le quadrilatère $IJKL$ a des diagonales orthogonales et de même longueur.

4. Le quadrilatère $IJKL$ est un carré si et seulement si c'est un parallélogramme, puisque ses diagonales sont de toute façon orthogonales et de même longueur.

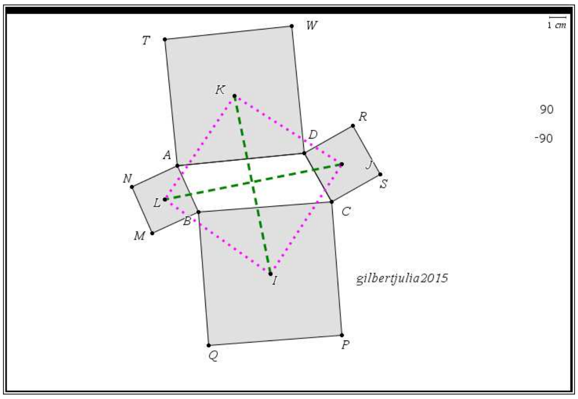
$IJKL$ est un parallélogramme si et seulement si $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu.

Or, les milieux de $[IK]$ et $[JL]$ ont pour affixes :

$$\begin{cases} \dfrac{k+u}{2} = \dfrac{1}{4}(1+i)(b+d) + \dfrac{1}{4}(1-i)(a+c) \\ \dfrac{j+l}{2} = \dfrac{1}{4}(1+i)(a+c) + \dfrac{1}{4}(1-i)(b+d) \end{cases}.$$

gjulia2015

Ces milieux sont identiques si et seulement si : $(1+i)(b+d)+(1-i)(a+c)=(1+i)(a+c)+(1-i)(b+d)$ c'est-à-dire si et seulement si : $b+d-a-c=0$, ce qui est une condition nécessaire et suffisante portant sur les affixes des quatre points pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.



Eléments de correction du problème annexe

1. Compte tenu des propriétés usuelles d'un carré et du choix d'orientation de la figure :

Le point I est l'image de B par la similitude de centre C, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Le point J est l'image de C par la similitude de centre A, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{4}$.

Si on note respectivement u et v les affixes de I et de J :

$$\begin{cases} u-c=\dfrac{1}{2}(1+i)(-1-c) \\ v-1=\dfrac{1}{2}(1+i)(c-1) \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} u=-\dfrac{1}{2}(1+i)+\dfrac{1}{2}(1-i)c=\dfrac{1}{2}(-1+x+y+i(-1-x+y)) \\ v=\dfrac{1}{2}(1+i)c+\dfrac{1}{2}(1-i)=\dfrac{1}{2}(1+x-y+i(-1+x+y)) \end{cases}$$

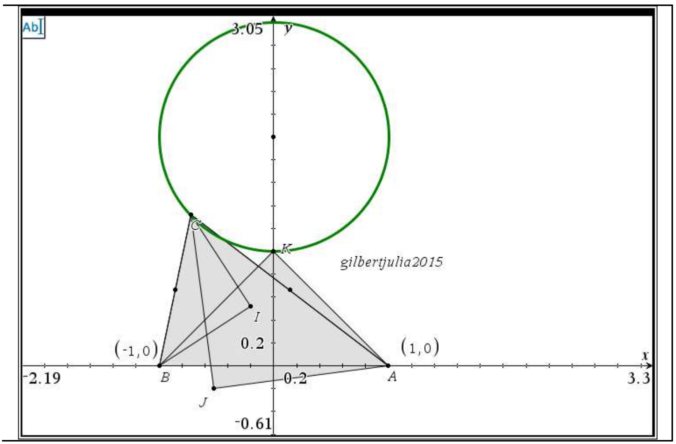
gjulia2015

2. par identification, Le point I a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \dfrac{-1+x+y}{2} \\ \dfrac{-1-x+y}{2} \end{pmatrix}$ et le point J : $\begin{pmatrix} \dfrac{1+x-y}{2} \\ \dfrac{-1+x+y}{2} \end{pmatrix}$

3. Le vecteur $\overrightarrow{KI}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \dfrac{-1+x+y}{2} \\ \dfrac{-3-x+y}{2} \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{KJ}$: gjulia2015 $\begin{pmatrix} \dfrac{1+x-y}{2} \\ \dfrac{-3+x+y}{2} \end{pmatrix}$.

Les trois points I, J, K sont alignés si et seulement si le déterminant de ces deux vecteurs est égal à zéro ce qui revient à la condition : $x^2+y^2-4y+3=0$. Il s'agit là de l'équation d'un cercle : $x^2+(y-2)^2=1$.

Ce cercle a pour centre le point d'affixe $2i$ et pour rayon 1.



On note que le cercle obtenu est entièrement contenu dans le demi-plan $y > 0$. *Si les points I, J, K sont alignés, alors le triangle ABC est un triangle de sens indirect. Par contraposition, si ABC est un triangle de sens direct, alors I, J, K ne sont pas alignés, ce qui est le cas sous les hypothèses de la configuration de Vecten.*

Noter aussi que le fait de choisir comme points A et B les points d'affixes 1 et -1 ne restreint en rien la généralité : si on se donne au préalable un triangle ABC on peut toujours fixer une unité et un repère pour qu'il en soit ainsi.