Who pays for the beer ?

Voici un exercice extrait de l'excellent concours canadien CIPAS (session 2012).

Au Canada, c'est un honneur de payer la tournée de bière. C'est pourquoi c'est le premier buveur qui tire un as qui paye la tournée.

Un exercice certainement impensable en France compte tenu de la prude loi Evin.

1. Le sujet

To see who pays for the beer, ***A*** and ***B*** play the following simple game. They shuffle a deck of cards, and then in turns draw cards. The first person to draw an ace pays for the beer.
If ***A*** draws first, what is the probability that he buys? (Express your answer as a fraction in lowest terms.)

Que se passe-t-il suivant que l'on utilise un jeu de 32 cartes ou un jeu de 52 cartes ?

Que se passe-t-il s'il y a quatre buveurs au lieu de deux ?

2. Une simulation

Le programme **whopays** ci-dessous simule sur TI*n*Spire une série de **e** expériences telles que celle décrite dans l'énoncé.

Il renvoie, parmi les **e** expériences effectuées, le nombre **a** de fois où A est le payeur et le nombre **b** de fois où B est le payeur.

Le jeu de cartes est représenté par l'ensemble $J=\{1, 2, \ldots, 32\}$ et les as par le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

Pour chaque expérience, la fonction **randSamp** affectée d'un troisième argument égal à 1 simule une permutation de J (voir https://www.univers-ti-nspire.fr/files/pdf/esd2010_0714ordi.pdf pour l'utilisation de cette fonction). On note le rang du premier as figurant dans la permutation (c'est-à-dire le premier élément de la permutation qui est ≤ 4). Si ce rang est pair, on incrémente la variable **b** d'une unité ; sinon, on incrémente la variable **a** d'une unité.

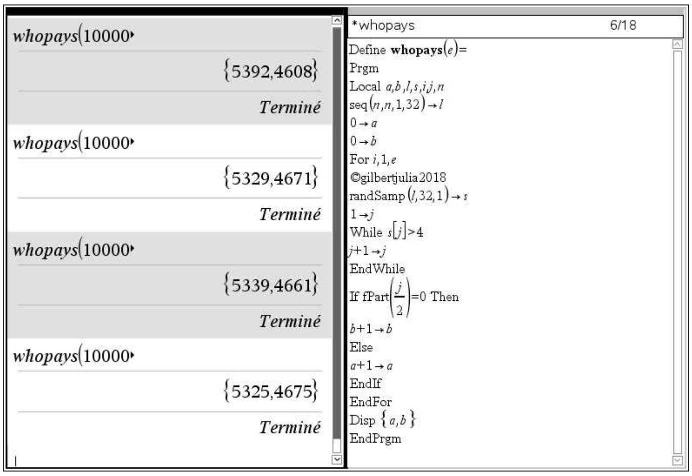
Le programme **whopays** est ici exécuté quatre fois avec $e=10000$.

À l'issue de chaque exécution, on peut proposer un intervalle de confiance au seuil 95 % de la probabilité p que A soit le payeur ($[0{,}5292\ ;\ 0{,}5492]$ à l'issue de la première exécution, $[0{,}5229\ ;\ 0{,}5429]$ à l'issue de la deuxième, …).

Pour être plus précis, si on regroupe les quatre exécutions, on observe que A est le payeur 21385 fois sur 40000 essais.
Ce qui donne une fréquence égale à 0,534625.

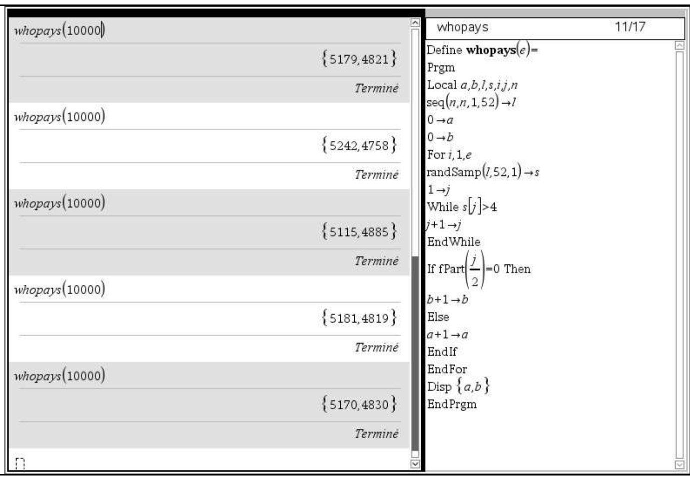
Un intervalle de confiance au seuil 95 % de cette probabilité p est ainsi $[0{,}529625\ ;\ 0{,}539625]$. gilbertjulia2018

L'intervalle $[0{,}529\ ;\ 0{,}540]$ en est un autre, au même seuil.



Ci-contre, la simulation est adaptée au cas où l'on utilise un jeu de 52 cartes.

On peut conjecturer que la probabilité que A soit le payeur est légèrement plus faible qu'avec un jeu de 32 cartes.



3. Eléments de correction

On suppose d'abord que l'on utilise un jeu de 32 cartes.

Le tirage du premier as au cours de l'expérience survient nécessairement entre le tirage de la première carte et le tirage de la vingt-neuvième carte.

On peut choisir comme espace probabilisé l'espace : $\Omega=\{a_1\ ;\ a_2\ ;...;a_{29}\}$ où l'indice i de a_i représente le rang du premier as tiré.

On note p_i la probabilité de a_i.

Calcul des p_i *pour* $i=1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4$

$p_1=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$; $p_2=\frac{28}{32}\times\frac{4}{31}=\frac{28}{31}\times p_1=\frac{7}{62}$; $p_3=\frac{28}{32}\times\frac{27}{31}\times\frac{4}{30}=\frac{27}{30}\times p_2=\frac{63}{620}$;

$p_4=\frac{28}{32}\times\frac{27}{31}\times\frac{26}{30}\times\frac{4}{29}=\frac{26}{29}\times p_3\underset{gj}{=}\frac{819}{8990}$

Une relation de récurrence entre p_k et p_{k-1}

Plus généralement, pour $29\geq k\geq 2$: $p_k=\frac{28}{32}\times\frac{27}{31}\times...\frac{28-k+2}{32-k+2}\times\frac{4}{32-k+1}\underset{gj}{=}\frac{30-k}{33-k}\times p_{k-1}$

Il faut en effet, pour que le premier as soit obtenu lors du tirage de la k-ième carte, qu'aucun as ne soit tiré précédemment et qu'un as soit obtenu à ce moment.

Distribution de probabilité $\{p_1\ ;\ p_2\ ;...;\ p_{29}\}$ à l'aide d'un tableur

La suite des 29 probabilités p_i est générée ci-contre.
Elle est stockée dans la variable **pai**.

	A pai	B	C
=	;en$\left(\frac{u(n-1)\cdot(30-n)}{...},n,u,\{1,29\},\{\frac{1}{...}\},1\right)$		
1	1/8	gilbertjulia2018	
2	7/62		
3	63/620		
4	819/8990		
5	585/7192		
6	65/899		
7	115/1798		
8	253/4495		

A **pai**:=seqgen$\left(\frac{u(n-1)\cdot(30-n)}{33-n},n,u,\{1,29\},\left\{\frac{1}{8}\right\},1\right)$

L'évènement A : « Le buveur A paie la tournée » est la partie de Ω composée des a_i d'indices impairs :

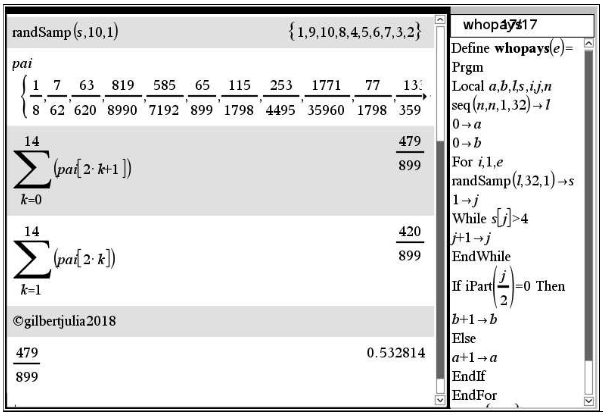
$A=\{a_1\ ;\ a_3\ ;\ ...;\ a_{27}\ ;a_{29}\}$.

La probabilité que A soit le payeur est la somme $\sum_{k=0}^{k=14} p_{2k+1}$ des probabilités p_i de rang impair.

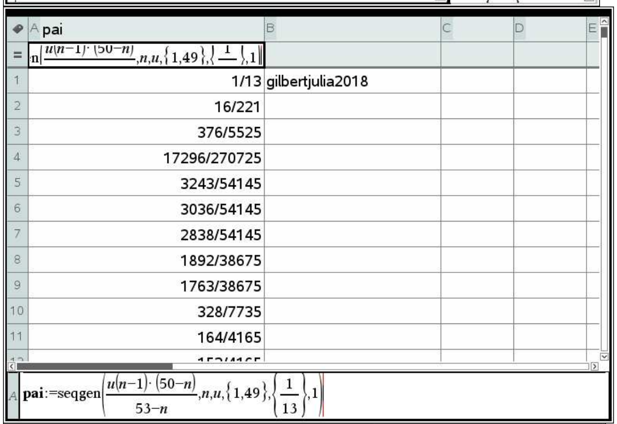
gilbertjulia2018

Cette probabilité est égale à $\frac{479}{899}$.

Si l'on tient compte des intervalles de confiance obtenus dans la simulation précédente, ce résultat est plausible.



Ci-contre, la suite **pai** a été adaptée au cas où l'on utilise un jeu de 52 cartes.

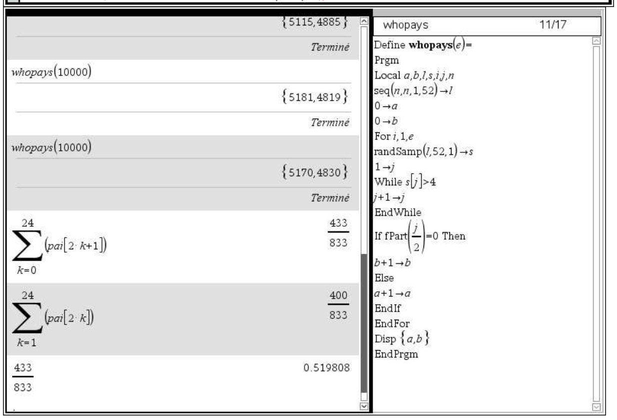


Et le calcul des probabilités a été modifié en conséquence.

La probabilité que A soit le payeur est la somme $\sum_{k=0}^{k=24} p_{2k+1}$ des probabilités p_i de rang impair.

gilbertjulia2018

Cette probabilité est égale à $\frac{433}{833}$.



Le buveur A a intérêt à utiliser un jeu de 32 cartes s'il veut maximiser les chances d'avoir le privilège de payer la tournée.

S'il y a quatre buveurs, l'évènement « A paye la tournée » est composé des éventualités dont l'indice est multiple de 4, plus 1. Ci-contre, dans le cas d'utilisation d'un jeu de 52 cartes, les probabilités que ce soit A, B, C ou D celui des quatre buveurs qui paie.