Inégalités de réordonnement

1. Le sujet

On dispose de deux listes de nombres réels strictement positifs de même dimension n, $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ *et* $\{b_1, b_2,..., b_n\}$*. On effectue les produits des termes deux à deux, choisissant un terme de la liste a et un autre de la liste b, pas nécessairement de même indice, sans jamais choisir deux fois le même, puis on ajoute le tout, obtenant ainsi une somme* $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)}$ *où* σ *est une permutation de l'ensemble* $\{1, 2, ..., n\}$*. Comment jumeler les* a_i *et les* b_j *pour obtenir un résultat le plus grand possible ? Le plus petit possible ?*

Pour répondre à la question, nous allons supposer $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ *et* $\{b_1, b_2,..., b_n\}$ *toutes deux ordonnées par ordre décroissant et étudier comment effectuer les jumelages de façon à obtenir le plus grand résultat possible puis le plus petit résultat possible.*

Nous en verrons ensuite quelques applications. Notamment une inégalité due à Pafnouti Tchebychev (1821 – 1894).

Partie A : le cas *n* = 2

Soient deux couples de réels strictement positifs (a_1, a_2) et (b_1, b_2) tels que $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$.

1. Montrer que $a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq a_1 b_2 + a_2 b_1$

2. Montrer que : $(a_1 b_1 + a_2 b_2) \geq \dfrac{(a_1 + a_2)\times(b_1 + b_2)}{2} \geq (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Telle se présente l'inégalité de Tchebychev au rang 2.

Partie B : le cas *n* = 3

Soient deux triplets de réels strictement positifs (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) tels que $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ et $b_1 \geq b_2 \geq b_3$. On définit les six nombres réels suivants :

$s_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ $\qquad$ $s_2 = a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2$

$s_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_3$ $\qquad$ $s_4 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1$

$s_5 = a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_3 b_2$ $\qquad$ $s_6 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$

NB. Remarquer que chaque s_j se présente sous la forme $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)}$ où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. Pour s_1, σ est l'identité, pour s_2, s_3 et s_6 c'est une transposition (permutation échangeant deux éléments et laissant les autres invariants), pour s_2 et s_5 c'est une permutation circulaire.
On se propose de déterminer quel est le plus grand et quel est le plus petit de ces six nombres réels.

1. Comparer s_1 et s_2 ; s_3 et s_4 ; s_5 et s_6.

2. Comparer s_1 et s_3 ; s_3 et s_5 .

3. Comparer s_2 et s_4 ; s_4 et s_6 .

4. Quel est le plus grand des six (on le note M) ? Quel est le plus petit des six (on le note m) ?

5. Vérifier : $s_1 + s_4 + s_5 = (a_1 + a_2 + a_3) \times (b_1 + b_2 + b_3)$. En déduire :

$$m \le \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) \times (b_1 + b_2 + b_3) \le M$$

Telle se présente l'inégalité de Tchebychev au rang 3.

6. *Une application classique* : Soient $a,\ b,\ c$ trois réels strictement positifs tels que $a \ge b \ge c$.

6.1. Comparer $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ avec $\frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$ et avec $\frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$.

6.2. Montrer que $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$

7. *Une application en géométrie (inspirée du sujet Concours Général Sénégalais, classes de Première 2017)*

On donne un triangle ABC dont tous les angles sont égaux et tel que $BC \ge CA \ge AB$. Soit H son orthocentre, A', B' et C' les pieds des hauteurs sur respectivement [BC], [CA], [AB]. Soit r le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.

7.1. En calculant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC, montrer que : $HA'.BC + HB'.CA + HC'.AB = r(AB + BC + CA)$.

7.2. Montrer que $HA' \ge HB' \ge HC'$

7.3. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Tchebychev, que $HA' + HB' + HC' \le 3r$

Partie C : le cas général n entier > 1

Soient n un entier tel que $n \ge 2$ et deux n-uplets de réels strictement positifs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$ tels que $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ et $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$. À toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, on associe la somme $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)}$. En particulier, on note $M = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + ... + a_n\, b_n$ la somme associée à l'identité et $m = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n+1-i} = a_1\, b_n + a_2\, b_{n-1} + ... + a_n\, b_1$ la somme associée à la permutation qui inverse l'ordre de numérotation.

1. On suppose que σ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2,..., n\}$ distincte de l'identité.
Il existe pour cette permutation au moins une inversion, c'est-à-dire un couple d'entiers (j, k) tels que : $j < k$; $\sigma(j) > \sigma(k)$ (j et k sont rangés par ordre croissant et leurs images sont rangées par ordre décroissant). Soit τ la transposition échangeant $\sigma(j)$ et $\sigma(k)$. Montrer que $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\tau\circ\sigma(i)}$.

2. Montrer que quelle que soit la permutation σ de l'ensemble $\{1, 2,..., n\}$, $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)} \le M$

3. Montrer que quelle que soit la permutation σ de l'ensemble $\{1, 2,..., n\}$, $\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_{\sigma(i)} \ge m$

4. Pour $j = 1, 2,..., n$, soit σ_j la permutation circulaire telle que :
$\sigma_j(1) = j$; $\sigma_j(2) = j+1$;...; $\sigma_j(n-j+1) = n$; $\sigma_j(n-j+2) = 1$;...; $\sigma_j(j+1) = 2$; $\sigma_j(n) = j-1$

On remarque que $\sigma_1 = I_d$; et, pour donner un exemple, σ_2 est telle que pour $1 \le i \le n-1$, $\sigma_2(i) = i+1$ et $\sigma_2(n) = 1$

On pose : $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma_j(i)}$. Montrer que $\sum_{j=1}^{n} s_j = (a_1 + ... + a_n) \times (b_1 + ... + b_n)$

En déduire que $m \le \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \le M$

Telle se présente l'inégalité de Tchebychev au rang n.

5. *Deux exemples d'application :*

5.1. Soient n nombres entiers distincts $x_1, x_2,.., x_n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

5.2. Soit un n-uplet de réels strictement positifs $(a_1, a_2,..., a_n)$ tels que $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ ..

Montrer que $\frac{a_1}{1\times 2} + \frac{a_2}{2\times 3} + ... + \frac{a_n}{n\times(n+1)} \ge \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_i$

2. Eléments de correction

Partie A : le cas n = 2

1. $(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) = (a_1 - a_2) \times (b_1 - b_2)$, produit de deux réels strictement positifs.

Donc $(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) \geq 0$ et $(a_1 b_1 + a_2 b_2) \geq (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

2. $(a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2) = (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Du fait de l'inégalité **A1** : $2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \geq (a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2) \geq 2(a_1 b_2 + a_2 b_1)$ ou si l'on veut :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2) \geq \frac{(a_1 + a_2) \times (b_1 + b_2)}{2} \geq (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Partie B : le cas n = 3

*Dans les différentes comparaisons à envisager, les deux s_i sont des sommes de trois termes ayant un terme commun, il suffira d'appliquer la question **A1** aux deux termes non communs.*

1. Les sommes s_1 et s_2 ont un terme en commun, le terme $a_1 b_1$.

$s_1 - a_1 b_1 = a_2 b_2 + a_3 b_3$ et $s_2 - a_1 b_1 = a_2 b_3 + a_3 b_2$.
(a_2, a_3) et (b_2, b_3) sont deux triplets tels que $a_2 \geq a_3$ et $b_2 \geq b_3$
D'après la question **A1**, $a_2 b_2 + a_3 b_3 \geq a_2 b_3 + a_3 b_2$. Donc $s_1 - a_1 b_1 \geq s_2 - a_1 b_1$ et finalement $s_1 \geq s_2$.

De façon analogue : $s_3 - a_1 b_2 = a_2 b_1 + a_3 b_3$ et $s_4 - a_1 b_2 = a_2 b_3 + a_3 b_1$
(a_2, a_3) et (b_1, b_3) sont deux triplets tels que $a_2 \geq a_3$ et $b_1 \geq b_3$. D'après la question **A1**, $a_2 b_1 + a_3 b_3 \geq a_2 b_3 + a_3 b_2$. Donc $s_3 - a_1 b_2 \geq s_4 - a_1 b_2$ et finalement $s_3 \geq s_4$.

$s_5 - a_1 b_3 = a_2 b_1 + a_3 b_2$ et $s_6 - a_1 b_3 = a_2 b_2 + a_3 b_1$.
(a_2, a_3) et (b_1, b_2) sont deux triplets tels que $a_2 \geq a_3$ et $b_1 \geq b_2$. D'après la question **A1**, $s_5 - a_1 b_3 = a_2 b_1 + a_3 b_2 \geq a_2 b_2 + a_3 b_1 = s_6 - a_1 b_3$ et finalement $s_5 \geq s_6$.

2. Les sommes s_1 et s_3 ont un terme en commun, le terme $a_3 b_3$.
$s_1 - a_3 b_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ et $s_3 - a_3 b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1$.
On applique la question **A1** avec les couples (a_1, a_2) et (b_1, b_2), pour établir l'inégalité $s_1 - a_3 b_3 > s_3 - a_3 b_3$ puis l'inégalité $s_1 > s_3$

$s_3 - a_2 b_1 = a_1 b_2 + a_3 b_3$ et $s_5 - a_2 b_1 = a_1 b_3 + a_3 b_2$.
On applique la question **A1** avec les couples (a_1, a_3) et (b_2, b_3), pour établir l'inégalité $s_3 - a_2 b_1 \geq s_5 - a_2 b_1$ puis l'inégalité $s_3 \geq s_5$

3. $s_2 - a_2 b_3 = a_1 b_1 + a_3 b_2$ et $s_4 - a_2 b_3 = a_1 b_2 + a_3 b_1$
On applique la question **A1** avec les couples (a_1, a_3) et (b_1, b_2), pour établir l'inégalité $s_2 \geq s_4$.

$s_4 = a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1$ et $s_6 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$
$s_4 - a_3 b_1 = a_1 b_2 + a_2 b_3$ et $s_6 - a_3 b_1 = a_1 b_3 + a_2 b_2$
On applique la question **A1** avec les couples (a_1, a_2) et (b_2, b_3), pour établir l'inégalité $s_4 \geq s_6$

4. En résumé :

- D'une part $s_1 \geq s_2 \geq s_4 \geq s_6$ et d'autre part $s_1 \geq s_3 \geq s_5$ donc le plus grand des six nombres est le nombre s_1. Le nombre M est le nombre s_1.
- D'une part $s_2 \geq s_4 \geq s_6$ et d'autre part $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq s_6$ donc le plus petit des six nombres est le nombre s_6. Le nombre m est le nombre s_6.

En revanche, on ne dispose d'aucune inégalité fiable ni entre s_2 et s_3 ni entre s_4 et s_5.

5. $(a_1 + a_2 + a_3)\times(b_1 + b_2 + b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3$.

$s_1 + s_4 + s_5 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_2) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)$

On remarque que les sommes s_i en jeu ici sont celles associées aux permutations circulaires :
En arrangeant autrement : $s_1 + s_4 + s_5 = a_1(b_1 + b_2 + b_3) + a_2(b_2 + b_3 + b_1) + a_3(b_3 + b_2 + b_1)$ et finalement :
$s_1 + s_4 + s_5 = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

Compte tenu des inégalités obtenues à propos des six nombres s_i : $3s_1 \geq s_1 + s_4 + s_5 \geq 3s_6$

On en déduit que : $M = s_1 \geq \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)\times(b_1 + b_2 + b_3) \geq s_6 = m$.

6.1. Par hypothèse : $a \geq b \geq c > 0$. Dans ce cas, $a + b \geq a + c \geq b + c$ et à l'inverse, $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

Nous avons affaire à deux suites de trois nombres ordonnées $a \geq b \geq c$ et $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

En appliquant les inégalités de réordonnement : $M = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ et d'autre part $M \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$ et $M \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$, car ces deux sommes sont associées à des permutations de (a, b, c) autres que l'identité.

En ajoutant les deux inégalités : $2M \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} + \frac{a+b}{a+b} = 3$ et par conséquent : $M \geq \frac{3}{2}$

C'est-à-dire : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

7. Les mesures des angles géométriques opposés aux côtés sont dans le même ordre que les côtés : $\hat{A} \geq \hat{B} \geq \hat{C}$

$$HC' = HA.\tan \widehat{HAC'} = \frac{HA}{\tan \hat{B}}$$

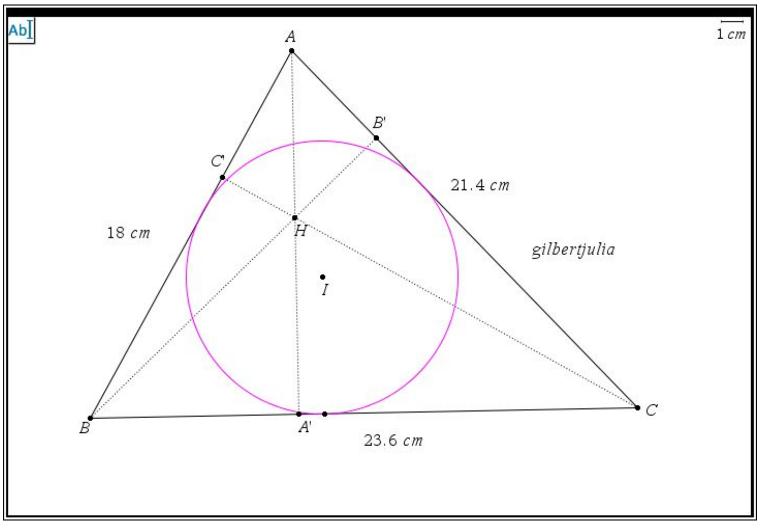
$$HB' = HA.\tan \widehat{HAB'} = \frac{HA}{\tan \hat{C}}$$

Les angles géométriques et leurs tangentes sont rangés dans le même ordre.

Vu que $\hat{B} \geq \hat{C}$, $\tan \hat{B} \geq \tan \hat{C}$ et par conséquent : $\frac{HA}{\tan \hat{B}} \leq \frac{HA}{\tan \hat{C}}$. Donc :

$HB' \geq HC'$.

Par une démonstration analogue, on montrerait que $HA' \geq HB'$.



L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(HA'.BC + HB'.CA + HC'.AB)$

Elle est aussi égale à : $\frac{r}{2}(CA' + CB' + BA' + AB' + AC' + BC') = \frac{r}{2}(AB + BC + CA)$

On a donc : $HA'.BC + HB'.CA + HC'.AB = r(AB + BC + CA)$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev aux deux suites ordonnées $HA' \geq HB' \geq HC'$ et $BC \geq CA \geq AB$

$$HA'.BC + HB'.CA + HC'.AB \geq \frac{1}{3}(AB + BC + CA)(HA' + HB' + HC')$$

Soit : $r(AB + BC + CA) \geq \frac{1}{3}(AB + BC + CA)(HA' + HB' + HC')$.

Finalement : $3r \geq (HA' + HB' + HC')$

Partie C : le cas général

1. Soit une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ distincte de l'identité. Il existe alors pour cette permutation au moins une inversion, c'est-à-dire un couple d'entiers (j, k) tels que : $j < k$; $\sigma(j) > \sigma(k)$ (j et k sont deux entiers dont les images sont rangées selon leur ordre contraire).

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{\sigma(i)}\right) + a_j b_{\sigma(j)} + a_k b_{\sigma(k)}$$

Soit τ la transposition telle que : $\tau(\sigma(j)) = \sigma(k)$; $\tau(\sigma(k)) = \sigma(j)$, c'est-à-dire échangeant les deux entiers $\sigma(i)$ et $\sigma(k)$, laissant tous les autres invariants.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\tau\circ\sigma(i)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{\sigma(i)}\right) + a_j b_{\tau\circ\sigma(j)} + a_k b_{\tau\circ\sigma(k)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{\sigma(i)}\right) + a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)}$$

Ainsi : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\tau\circ\sigma(i)}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)}\right) = \left(a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)}\right) - \left(a_j b_{\sigma(j)} + a_k b_{\sigma(k)}\right)$

Par hypothèse, les couples (a_j, a_k) et $(b_{\sigma(j)}, b_{\sigma(k)})$ sont tels que $a_j \geq a_k$ et $b_{\sigma(k)} \geq b_{\sigma(j)}$.

En appliquant la question **A1** à ce couple d'entiers, $\left(a_j b_{\sigma(k)} + a_k b_{\sigma(j)}\right) \geq \left(a_j b_{\sigma(j)} + a_k b_{\sigma(k)}\right)$ et par conséquent $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\tau\circ\sigma(i)}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)}\right)$

Autrement dit, si la permutation σ n'est pas l'identité, il existe une permutation $\tau\circ\sigma$ telle que $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\tau\circ\sigma(i)}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)}\right)$. C'est-à-dire dont la somme associée est au moins égale à la somme initiale.

2. Si cette nouvelle permutation n'est pas l'identité, on itère le raisonnement à son propos. Au bout d'un nombre fini d'opérations, on aura neutralisé toutes les inversions sans jamais avoir diminué la somme.
Mais si on a décousu toutes les inversions l'une après l'autre, c'est qu'on a abouti à l'identité.

La somme maximale est alors obtenue : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)}\right)$

3. En ce qui concerne le minimum : il revient au même de considérer toutes les sommes $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)}$ que toutes les sommes $\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)}$ car lorsque la permutation σ décrit S_n, la permutation $\pi\circ\sigma$ où $\pi(i) = n - i + 1$ (la permutation π inverse l'ordre de numérotation) décrit aussi S_n.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{n-\sigma(i)}\right) + a_j b_{n-\sigma(j)} + a_k b_{n-\sigma(k)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{n-\sigma(i)}\right) + a_j b_{n-\sigma(j)} + a_k b_{n-\sigma(k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\tau\circ\sigma(i)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{n-\sigma(i)}\right) + a_j b_{n-\tau\circ\sigma(j)} + a_k b_{n-\tau\circ\sigma(k)} = \left(\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}} a_i b_{n-\sigma(i)}\right) + a_j b_{n-\sigma(k)} + a_k b_{n-\sigma(j)}$$

En cette circonstance : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\tau\circ\sigma(i)}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)}\right)=\left(a_j b_{n-\sigma(k)}+a_k b_{n-\sigma(j)}\right)-\left(a_j b_{n-\sigma(j)}+a_k b_{n-\sigma(k)}\right)$

Mais compte tenu du classement $j<k$ et $\sigma(j)>\sigma(k)$, cette fois $j<k$ et $n-\sigma(j)<n-\sigma(k)$

Donc : $\left(a_j b_{n-\sigma(k)}+a_k b_{n-\sigma(j)}\right)-\left(a_j b_{n-\sigma(j)}+a_k b_{n-\sigma(k)}\right)\leq 0$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\tau\circ\sigma(i)}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)}\right)\leq 0$

Autrement dit, si la permutation σ n'est pas l'identité, il existe une permutation $\tau\circ\sigma$ telle que.

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\tau\circ\sigma(i)}\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)}\right)$. C'est-à-dire dont la somme associée est inférieure ou égale à la somme initiale.

Au bout d'un nombre fini d'itérations, on aura neutralisé toutes les inversions sans jamais avoir augmenté la somme. La somme minimale est alors obtenue : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-i}\right)\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-\sigma(i)}\right)$

4. Notons σ_i la permutation circulaire telle que : $\sigma(1)=i$; $\sigma(2)=i+1$;...; $\sigma(n-i+1)=n$; $\sigma(n-i+2)=1$;. ..$\sigma(i+1)=2$; $\sigma(n)=i-1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)=\left(a_1\, b_1+\ldots+a_1 b_n\right)+\left(a_2\, b_1+\ldots+a_2 b_n\right)+\ldots+\left(a_n\, b_1+\ldots+a_n b_n\right)$$

$$s_1=a_1 b_1+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}+a_n b_n=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_1(i)}$$

$$s_2=a_1 b_2+\ldots+a_{n-1}b_n+a_n b_1=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_2(i)}$$

$$s_3=a_1 b_3+\ldots+a_{n-1}b_1+a_n b_2=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_3(i)}$$

….

$$s_n=a_1 b_n+a_2 b_1+\ldots+a_n b_{n-1}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_n(i)}$$

Chaque s_i est une somme de n termes. On remarque que si on ajoute tous les termes d'un même rang i, on obtient $a_i\left(b_1+b_2+\ldots+b_n\right)$.

En ajoutant membre à membre tous les termes : $s_1+s_2+\ldots+s_n=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$

Pour tout indice i : $M\geq s_i\geq m$: $n\times M\geq\sum_{i=1}^{n} s_i\geq n\times m$ et finalement : $M\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)\geq m$

5.1. Soient n nombres entiers distincts $x_1, x_2,.., x_n$.

On note $a_1, a_2,.., a_n$ la suite des mêmes nombres entiers mais ordonnée par ordre décroissant $a_1 > a_2 > ... > a_n$ de sorte qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2,..., n\}$ $x_i = a_{\sigma(i)}$ pour tout indice i.

D'après les inégalités de réordonnement : $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{\sigma(k)}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^2}$.

Le fait que les a_i soient des entiers strictement positifs distincts implique que pour tout indice k : $a_n \geq 1$, puis $a_{n-1} > a_n \geq 2$ et de proche en proche $a_{n-k} \geq k$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{\sigma(k)}}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k^2}$$

5.2. Les réels a_i sont classés de façon que : $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$.

Pour tout entier k strictement positif, soit $b_k = \frac{1}{k(k+1)}$:

Les b_i forment une suite décroissante : $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$.

D'autre part pour tout entier k strictement positif : $b_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ de sorte que :

$$b_1 + b_2 + ... + b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Appliquons l'inégalité de Tchebychev avec ces deux suites ordonnées $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$ et $b_1 \geq ... \geq b_n$.

On obtient : $\frac{a_1}{1\times 2} + \frac{a_2}{2\times 3} + ... + \frac{a_n}{n\times(n+1)} \geq \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=1}^{n} a_i = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} a_i$