Concours général 2014 pb 3 : chiffres et lettres

1. Le sujet

Un mot de longueur n est une suite de n lettres choisies parmi les l0 lettres $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$. Par exemple, *BEC*, *IJCD*, *AFFICHAGE*, *ABCDEFGHIJ* sont des mots de longueurs respectives 3, 4, 9, 10.
Une attribution du mot ω est un nombre dont l'écriture décimale est obtenue en remplaçant chaque lettre de ω par un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que des lettres identiques sont remplacées par le même chiffre et que deux lettres distinctes sont remplacées par des chiffres différents. Il est permis que le premier chiffre de l'attribution soit égal à 0. Par exemple, 121 et 040 = 40 sont deux attributions pour le mot *GAG*, mais 333 et 452 n'en sont pas ; 555 et 000 = 0 sont des attributions de *AAA*, mais pas 112 ou 789.

Soit d un entier strictement positif. On dit que le mot ω est un *bloqueur* de d si toute attribution de ω est un nombre non divisible par d. Ainsi le mot $\omega = AABCA$ n'est pas un bloqueur de $d = 4$, car 66716 est une attribution de ω qui est divisible par 4.

1.1. Montrer que le mot *AB* est un bloqueur de $d = 100$.
1.2. Montrer que tout nombre d'au moins trois chiffres admet un bloqueur.

Le nombre $d > 0$ est dit *mauvais* s'il admet au moins un bloqueur. Sinon, on dit que d est bon. La question précédente montre que tout nombre d'au moins trois chiffres est mauvais.

2.1. Montrer que 10 est bon.
2.2. Montrer que 8 est bon.
2.3. Montrer que le mot *AAB* est un bloqueur de 27.
2.4. Montrer que le mot *ABBAB* est un bloqueur de 32.
2.5. Un diviseur positif d'un nombre bon est-il forcément bon ? Un diviseur positif d'un nombre mauvais est-il forcément mauvais ?

Si k est un entier strictement positif et si X est une lettre, on note X^k le mot $XX...X$ formé de k lettres X.
3.1. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et soit ω le mot défini par :
$$\omega = AAA^{p-2}BA^{p-2}CA^{p-2}DA^{p-2}EA^{p-2}FA^{p-2}GA^{p-2}HA^{p-2}IA^{p-2}JA^{p-2}$$
Montrer que ω est un bloqueur de p.
On pourra utiliser librement le petit théorème de Fermat : si x est un entier non divisible par p, alors p divise $x^{p-1} - 1$

3.2. Montrer qu'il existe au plus 27 nombres bons.

4. Soit ω un mot de longueur n, et a une attribution de ω. On note a' l'attribution de ω obtenue à partir de a en permutant circulairement, dans cet ordre, les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7,8 sans toucher aux 9. Autrement dit, dans l'écriture décimale de a, les chiffres 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont respectivement remplacés par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 9. Par exemple, si $n = 5$ et $a = 01789$ alors $a' = 12809$. Soit k le nombre d'apparitions du chiffre 9 dans l'écriture décimale de a.
4.1. Si a est congru à r modulo 9, à quoi est congru a' modulo 9 ?
4.2. En déduire que si k n'est pas congru à n modulo 3, alors il existe une attribution de a divisible par 9.
4.3. Montrer qu'il en est de même si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9.
4.4. Montrer que 9 est bon.

5. Montrer que 18 est bon.

6. Montrer que si un nombre est mauvais, il admet une infinité de bloqueurs.

Pour information, on peut montrer qu'il existe exactement 22 nombres bons. Ce sont les diviseurs positifs des nombres 18, 24, 45, 50, 60, 80.

2. Une conjecture pour la question 3.1.

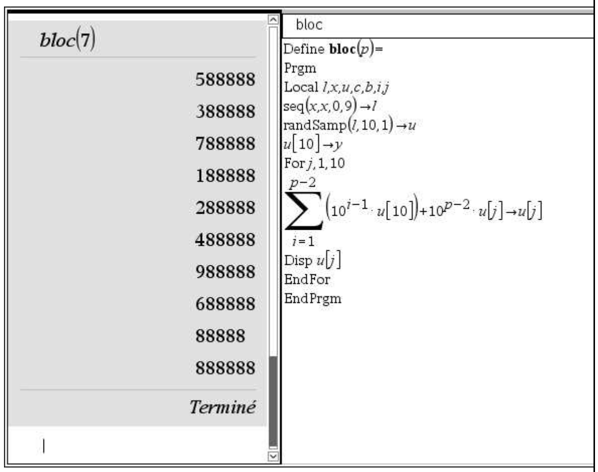
On se propose de construire un programme générant une attribution a du mot ω étudié dans cette question amenant à une conjecture.

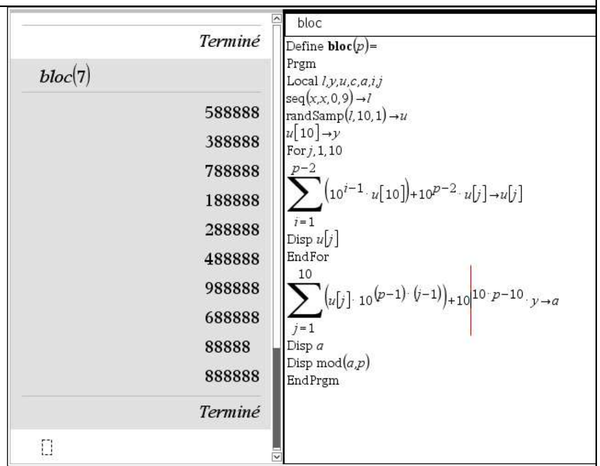
Le réglage du fichier est en mode « Exact »

Ce programme sera nommé **bloc** et affecté d'un argument, l'entier premier p.

Si on considère une attribution de ω, on remarque dans son écriture des séquences de chiffres de la forme XA^{p-2}, où X est un chiffre distinct ou non de A.

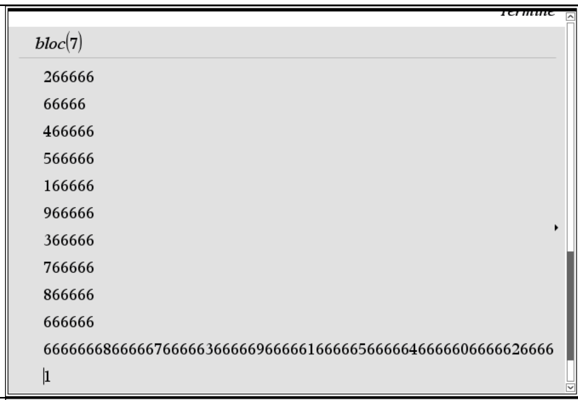
Si b est une attribution du mot XA^{p-2} : $b=\left(1+10+\ldots+10^{p-3}\right)A+10^{p-2}X$.
Ensuite, l'attribution a de ω est une somme d'entiers de la forme $\left(XA^{p-2}\right)\times 10^{k(p-1)}$ pour k allant de zéro à 9 et X allant de J à B, complétée encore par l'entier : $AAA^{p-2}\times 10^{9(p-1)}$.

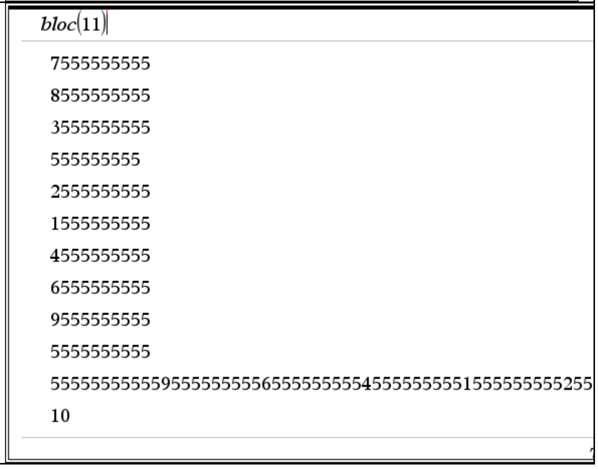
<table>
<tr>
<td>
1. Un programme provisoire
La liste l est composée des dix chiffres de l'écriture décimale usuelle.
L'instruction randSamp(l, 10,1) génère une nouvelle liste stockée dans u où les chiffres ont été permutés aléatoirement (le troisième argument égal à 1 assure qu'il n'y a pas de répétition de chiffres dans cette nouvelle liste).
L'entier $u[10]$ est « réservé » en variable y pour une utilisation ultérieure.
L'instruction conditionnelle For … EndFor est destinée à générer et stocker les attributions des mots XA^{p-2} où A est fixé (c'est $u[10]$) et où X parcourt tous les chiffres de la liste u. On fait afficher ces attributions.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
2. Le programme complet
On construit maintenant l'attribution a de ω correspondante, que l'on fait afficher.
On fait afficher également le reste de la division de a par p.
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
On peut lancer le programme avec $p=7$.
Dans l'exemple ci-contre, nous avons obtenu l'attribution :
1111111511111011111411111811111911111211111711
1113111116111111
Cet entier est congru à 1 modulo 7.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Cette fois, nous avons obtenu l’attribution :
6666666866666766666366666966666166666566666466666066666266666
Cet entier est aussi congru à 1 modulo 7.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Essayons avec 11 …

On obtient par exemple l’attribution :
555555555559555555555565555555555455555555551555555555525555555555505555555555355555555558555555555557555555555
Laquelle attribution est congrue à 10 modulo 11.
D’autres lancements du programme bloc changent l’attribution, mais on retrouve toujours la même congruence. Il semble que toute attribution soit cette fois congrue à 10 modulo 11.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Le lecteur pourra vérifier qu’avec 13, on obtient des attributions qui semblent toutes congrues à 1 modulo 13 et qu’avec 17, on obtient des attributions qui semblent toutes congrues à 3 modulo 17.

3. Indications

Un inconvénient de proposer des « indications » est que ces « indications » orientent vers la piste de résolution que moi j'ai suivie, au détriment certainement d'autres pistes qui pourraient être autant sinon plus prometteuses ...

2.3. Chercher les attributions de AAB qui sont multiples de 9 et montrer qu'aucune d'entre elles n'est multiple de 27.

2.4. Considérer une attribution de $ABBAB$ et la passer à la moulinette d'une congruence modulo 32.

3.1. Prendre en compte que : $\left(1+10+...+10^{p-3}+10^{p-2}\right)\times(10-1)=10^{p-1}-1$.

- Considérer une attribution d'un mot de la forme XA^{p-2} où X désigne l'une des lettres A, B, …, J. Montrer que cette attribution (abusivement certes, notée aussi XA^{p-2}) vérifie :

$$XA^{p-2} \equiv (X-A)\times 10^{p-2}\ (p)$$

- Montrer que si a est une attribution du mot ω considéré dans cette question : $a \equiv (A+B+C+...+J)10^{p-2}\ \ (p)$
- Faire le lien avec la « conjecture » trouvée à la partie 2 et tester la conclusion

3.2.

- Justifier que les facteurs premiers d'un nombre « bon » ne peuvent être que 2, 3 ou 5.
- Majorer les exposants de ces facteurs en utilisant **2.3** et **2.4**.
- Faire l'inventaire des nombres plus petits que 100 que l'on peut fabriquer ainsi.

4.1. Montrer que $a' \equiv r+(n-k)\ (9)$.

4.2. Itérer plusieurs fois la permutation suggérée et considérer les résultats des congruences obtenues. Justifier que l'un des résultats est nul.

4.3. Justifier qu'il y a au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture de a n'est pas congru à n modulo 3. Essayer de permuter dans l'écriture de a le chiffre 9 avec ce chiffre.

4.4. Il reste à montrer que l'on peut obtenir une attribution de ω qui est divisible par 9 même si k est congru à n modulo 9. On peut essayer de trouver une permutation de chiffres ramenant à l'un des cas précédents. (Si $r=0$, la question est réglée, sinon justifier qu'il y a un chiffre dont le nombre d'apparitions n'est pas congru à n modulo 9 …).

5. Soit ω un mot. Considérer une attribution a de ω qui est divisible par 9. Si le dernier chiffre est pair, la question est réglée. Sinon, on peut essayer dans l'écriture de a la permutation de chiffres : $c \mapsto 9-c$ et voir ce qu'il se passe pour cette nouvelle attribution.

6. *Un lemme qui peut être utile …*

Soit q un nombre entier strictement positif. Pour tout entier strictement positif k, on pose : $s_k = 1+q+q^2+...+q^{k-1}$

Lemme : De la suite de nombres entiers (s_k), on peut extraire une suite dont les termes sont des entiers premiers entre eux deux à deux.

En effet :

L1. Montrer que $s_2 = 1 + q$ et $s_3 = 1 + q + q^2$ sont des entiers premiers entre eux.

L2. Montrer que $s_7 = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6$ est premier avec s_2 et avec s_3.

L3. Montrer que $s_{43} = 1 + q + ... + q^{42}$ est premier avec s_2, avec s_3 et avec s_7.

L4. En général, on considère la suite (j_k) ainsi définie : $j_1 = 2$ et pour tout $k \geq 2$: $j_k = 1 + \prod_{u=1}^{u=k-1} j_u$ de sorte par exemple que : $j_2 = 1 + j_1 = 3$; $j_3 = 1 + j_1 \times j_2 = 1 + 2 \times 3 = 7$; $j_4 = 1 + j_1 \times j_2 \times j_3 = 1 + 2 \times 3 \times 7 = 43$.

On pose pour tout entier $k \geq 1$: $w_k = s_{j_k}$ de sorte par exemple que : $w_1 = s_2$; $w_2 = s_3$; $w_3 = s_7$; $w_4 = s_{43}$.
Montrer que w_k est premier avec chacun des entiers w_1 ; w_2 ; ... ; w_{k-1}. Conclure.

Une piste de résolution de la question 6 est, si ω est un mot bloqueur d'un « mauvais » nombre *m*, de considérer mots obtenus en accolant les uns aux autres des « ω ». Si *a* est une attribution de ω, expliciter l'attribution correspondante de ces mots. On obtient des attributions du type $a \times F$ où *F* est un certain facteur à expliciter. Montrer en utilisant le lemme qu'il y a une infinité de mots accolés tels que *m* et *F* sont premiers entre eux.

4. Eléments de correction

1. Les attributions de *AB* sont tous les entiers qui s'écrivent avec deux chiffres distincts de {1, …,10, 12, …, 21, 23, … 98} c'est-à-dire tous les entiers compris entre 0 et 99 à l'exception de 00, 11, 22, 33, …, 99.
L'unique diviseur d'un entier s'écrivant avec au moins trois chiffres qui soit compris entre 0 et 99 est l'entier zéro lequel n'est pas une attribution de *AB*. Donc *AB* est un bloqueur de tout entier ≥ 100. Tous les entiers supérieurs ou égaux à 100 sont mauvais.

2.1. Quel que soit le mot ω, de dernière lettre *x*, ses attributions telles que $x=0$ sont divisibles par 10. L'entier 10 n'admet aucun bloqueur, il est bon.

2.2. Les entiers divisibles par 8 sont ceux dont l'entier représenté par ses trois derniers chiffres est lui même divisible par 8. Pour savoir si 8 est bon ou non, il suffit de tester les mots ω s'écrivant avec trois lettres au plus. Il y a cinq mots à trois lettres qui sont *AAA*, *AAB*, *ABA*, *BAA*, *ABC*.
Or par exemple, les entiers 000, 008, 080, 800, 016 sont tous divisibles par 8 et sont, respectivement, des attributions de ces mots. Quant aux mots de moins de trois lettres, *A*, *AA* ou *AB*, 8, 08, 88 par exemple en sont respectivement des attributions divisibles par 8.
Il en résulte que 8 n'admet pas de bloqueur. Il est bon.

2.3. Un entier divisible par 27 est *a fortiori* divisible par 9. Les attributions de *AAB* qui sont divisibles par 9 sont : 009, 117 = 13×9, 225 = 25×9, 441 = 49×9, 558 = 63×9, 774 = 86×9, 882 = 98×9, 990 = 110×9. Aucune d'entre elles n'est divisible par 27. Il en résulte que *AAB* est un bloqueur de 27.

2.4. Soient *a*, *b* deux chiffres distincts et $\overline{abbab}$ l'attribution de *ABBAB* associée. Cet entier est divisible par 32 si et seulement si $\overline{abbab}\equiv 0 \quad (32)$. Or : $\overline{abbab}=a\times 10010+b\times 1101\equiv 26a+13b \quad (32)$
Mais puisque 13 et 32 sont deux entiers premiers entre eux, $26a+13b=13(2a+b)\equiv 0\ (32)$ si et seulement si $2a+b\equiv 0\ (32)$ c'est-à-dire si et seulement si $2a+b$ est lui-même un entier divisible par 32. Or, il n'existe aucun couple de chiffres distincts tels que $2a+b$ soit divisible par 32 (en effet l'entier $2a+b$ est nécessairement compris entre 1 et 26). Donc, aucune attribution de *ABBAB* n'est divisible par 32, ce mot est un bloqueur de 32.

2.5. 32 est mauvais alors que l'un de ses diviseurs, en l'occurrence 8, est bon. Un diviseur positif d'un nombre mauvais n'est pas nécessairement mauvais.

Soit *b* un nombre bon et *u* un diviseur positif de *b*. L'entier *b* admet un bloqueur dont aucune des attributions n'est divisible par *b*. Aucune de ces attributions n'est *a fortiori* divisible par *u*. Donc tout diviseur positif d'un nombre bon est bon.

Si un mot ω bloque un entier *x*, il bloque aussi tous les multiples de *x* : puisque ses attributions ne sont pas divisibles par *x* elles ne le sont pas non plus par un quelconque multiple de *x*. Donc tous les multiples d'un nombre mauvais sont mauvais.

3.1. Si on considère une attribution *a* de ω, les chiffres *J*, *I*, …, *B* sont ceux de rangs respectifs $p-1$; $2(p-1)$; ...;$9(p-1)$.
Il s'ensuit que le premier chiffre de chacun des 10 blocs « A^{p-2} » est associé à des puissances remarquables de dix :10^0 ; 10^{p-1} ;....;$10^{9(p-1)}$.

$$a=\left(AAA^{p-2}\right)\times 10^{9(p-1)}+\left(BA^{p-2}\right)\times 10^{8(p-1)}+\ldots+\left(IA^{p-2}\right)\times 10^{p-1}+\left(JA^{p-2}\right)$$

D'après le petit théorème de Fermat, chacune de ces puissances est congrue à 1 modulo *p*. En conséquence :

$$a\equiv\left(AAA^{p-2}\right)+\left(BA^{p-2}\right)+\left(CA^{p-2}\right)+\ldots+\left(JA^{p-2}\right)(p)$$

Nous sommes amenés à étudier les entiers dont l'écriture décimale est XA^{p-2}.

Si *b* est une attribution d'un tel entier : $b=\left(1+10+...+10^{p-3}\right)A+10^{p-2}X$

On considère la relation : $10^{p-1}-1=(10-1)\left(1+10+10^2+...+10^{p-2}\right)=9\left(1+10+10^2+...+10^{p-2}\right)$.

D'après le petit théorème de Fermat, $10^{p-1}-1=9\left(1+10+10^2+...+10^{p-2}\right)$ est divisible par *p*. Puisque *p* est par hypothèse un nombre premier supérieur ou égal à 7, il est premier avec 9, donc il divise $1+10+10^2+...+10^{p-2}$

On en conclue que : $1+10+10^2+...+10^{p-3}+10^{p-2}\equiv 0\ (p)$ c'est-à-dire que $1+10+10^2+...+10^{p-3}\equiv -10^{p-2}\ (p)$.

On en déduit : $b\equiv (X-A)10^{p-2}\ (p)$ puis : $a\equiv \left((10A)+(B-A)+(C-A)+...+(J-A)\right)10^{p-2}\ (p)$ et finalement $a\equiv (A+B+C+...+J)10^{p-2}\ (p)$

La somme des dix chiffres étant 45 : $a\equiv 45\times 10^{p-2}\ (p)$, et lorsque *p* est un nombre premier supérieur ou égal à 7, l'entier $45\times 10^{p-2}$ est premier avec *p*. Aucune attribution de ω ne peut être divisible par *p*. Le mot ω est un bloqueur de *p*.

3.2. Dans la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre bon, il ne peut y avoir aucun nombre premier autre que 2, 3 ou 5. Sa décomposition est de la forme $2^x3^y5^z$ avec $x<5$; $y<3$; $z<3$ puisqu'on a vu que 32, 27 et 125 pour diverses raisons sont mauvais.
De plus, ce nombre est < 100. Les nombres susceptibles d'être bons sont :
1, 2, 4, 8, 16 ainsi que 3, 6, 12, 24, 48, ou 5, 10, 20, 40, 80 ou 9, 18, 36, 72 ou 15, 30, 60 ou 45, 90 ou 25, 50 ou 75. Ce qui fait 27 nombres.

4.1. En règle générale, modulo 9, un entier est congru à la somme de ses chiffres autres que le chiffre 9.
La règle de remplacement revient à remplacer tout chiffre *c* autre que 9 par le reste de la congruence modulo 9 de $c+1$ (puisque 8 est remplacé par zéro qui est congru à 9 modulo 9)
Si *k* est le nombre d'apparitions du 9 dans l'écriture de *a*, il y a $n-k$ autres chiffres dans cette écriture, et $a'\equiv r+(n-k)\quad (9)$

4.2. On va montrer que l'on peut obtenir une attribution qui est congrue à 0 modulo 9.
En pratiquant de 1 à 8 fois la permutation circulaire annoncée on obtient des attributions qui sont congrues à $r+(n-k)$; ... ; $r+8(n-k)$. Si l'entier *k* n'est pas congru à *n* modulo 3, l'entier $n-k$ est premier avec 9 et ses multiples $(n-k)$;...;$8(n-k)$ sont congrus (dans un certain ordre) aux entiers 1 ; 2 ; … ; 8 modulo 9. Dans ce cas, quel que soit l'entier *r*, un et un seul des entiers r ; $r+(n-k)$;...;$r+8(n-k)$ est congru à 0 modulo 9. On obtient par conséquent une attribution qui est divisible par 9.

4.3. Si *k* est congru à *n* modulo 3, mais pas modulo 9, les entiers r ; $r+(n-k)$;...;$r+8(n-k)$ sont congrus à l'un ou l'autre des entiers r ; $r+3$; $r+6$ (on les obtient trois fois chacun). Si *r* est congru à 0 modulo 3, alors l'un des trois entiers r ; $r+3$; $r+6$ est congru à 0 modulo 9, et on obtient une attribution qui est divisible par 9 (et même on en obtient trois).
Si ce n'est pas le cas, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture de *a* n'est pas congru à *n* modulo 3 (sinon, *r* serait multiple de 3). Soit a_1 l'attribution de ω obtenue en remplaçant dans l'écriture ce chiffre par le chiffre 9 et le 9 par ce chiffre. Cette fois, le nombre d'apparitions du chiffre 9 n'est plus congru à 0 modulo 3.
On obtient une attribution qui ramène au cas étudié dans **4.2.**

4.4. Il reste à montrer que l'on peut obtenir une attribution de ω qui est divisible par 9 même si *k* est congru à *n* modulo 9.
Dans ce cas, tous les entiers r ; $r+(n-k)$;...;$r+8(n-k)$ sont congrus à *r* modulo 9. Si *r* est congru à 0 modulo 9, alors toutes les attributions obtenues sont divisibles par 9. Sinon, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture n'est pas congru à *n* modulo 9 (sinon *r* serait

multiple de 9). On permute ce chiffre avec le 9 pour obtenir une attribution qui ramène au cas **4.3** ou au cas **4.2**. Dans tous les cas, on peut construire une attribution de ω qui est divisible par 9, ce qui prouve qu'aucun mot n'est bloqueur de 9. Par conséquent, 9 est bon.

5. On peut essayer de compléter le raisonnement de la question 4 en montrant que pour tout mot ω, on peut construire une attribution de ω qui est non seulement divisible par 9 mais aussi paire.
Soit donc ω un mot et a une attribution de ω qui est divisible par 9 (la question précédente montre qu'il y en a au moins une). Soit n sa longueur, r la somme de ses chiffres et x_i le nombre d'apparitions du chiffre i ($i = 0,1,...,9$) dans l'écriture de a. (Par conséquent : $r = \sum_{i=0}^{9} i \times x_i \equiv 0 \ (9)$)
Si le dernier chiffre de a est pair, cette attribution est multiple de 18, la question est réglée.

Si ce n'est pas le cas, on remplace les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par respectivement les chiffres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cette permutation revient à remplacer le chiffre i par le chiffre $9-i$ et a pour effet de remplacer un chiffre pair par un impair et inversement. Cette nouvelle attribution a pour somme de chiffres :

$\sum_{i=0}^{9}(9-i)\times x_i = \sum_{i=0}^{9} 9x_i - \sum_{i=0}^{9} i \times x_i = 9n - r$. Si r est divisible par 9, il en est de même de $9n-r$. On obtient une nouvelle attribution multiple de 9 et dont le dernier chiffre est pair, elle est multiple de 18.
Aucun mot ne bloque 18, 18 est bon.

6. ***Démonstration du lemme :***
L1. $s_3 = 1 + q + q^2 = q s_2 + 1$. La relation : $s_3 - q s_2 = 1$ est une relation de Bézout, prouvant que $s_2 = 1 + q$ et $s_3 = 1 + q + q^2$ sont des entiers premiers entre eux.

L2. $s_7 = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 = 1 + (q + q^3 + q^5)s_2 = 1 + (q + q^4)s_3$
Les relations : $s_7 - (q + q^3 + q^5)s_2 = 1$ et $s_7 - (q + q^4)s_3 = 1$ sont deux relations de Bézout prouvant que s_7 est premier avec s_2 et avec s_3.

L3. $s_{43} = 1 + q ... + q^{42}$. Il y a dans cette somme 42 puissances de q (autres que la « puissance zéro-ème » 1) que l'on peut regrouper de diverses façons :
Par paquets de 2 termes : $s_{43} = 1 + q ... + q^{42} = 1 + q(1+q) + q^3(1+q) + ... + q^{41}(1+q)$ ce qui amène à la relation : $s_{43} = 1 + (q + q^3 + + ... + q^{35})s_2$
Par paquets de 3 termes : $s_{43} = 1 + q(1 + q + q^2) + q^4(1 + q + q^2) + ... + q^{40}(1 + q + q^2)$ ce qui amène à la relation : $s_{43} = 1 + (q + q^4 + ... + q^{34})s_3$
Par paquets de 7 termes : $s_{43} = 1 + (q + q^8 + q^{15} + q^{22} + q^{29} + q^{36})s_7$

Chacune des relations obtenues est une relation de Bézout prouvant que $s_{43} = 1 + q + ... + q^{42}$ est premier avec s_2, avec s_3 et avec s_7

L4. $w_k = s_{j_k} = 1 + q + ... + q^{j_k - 1}$. Il y a dans cette somme $j_k - 1 = \prod_{u=1}^{u=k-1} j_u$ puissances de q (autres que la « puissance zéro-ème » 1) que l'on peut regrouper de diverses façons puisque ce nombre est un multiple de tous les précédents entiers j_i.

Si l'on prend en particulier l'un de ces entiers j_i, il est possible de regrouper par paquets de j_i termes et on forme ainsi $\dfrac{\prod_{u=1}^{u=k-1} j_u}{j_i}$ paquets.

$$w_k = 1+q\left(1+\ldots+q^{j_i-1}\right)+q^{j_i+1}\left(1+\ldots+q^{j_i-1}\right)+\ldots+q^{j_k-j_i}\left(1+\ldots+q^{j_i-1}\right)$$

Le dernier exposant est en effet : $1+\left(\dfrac{\prod_{u=1}^{u=k-1} j_u}{j_i}-1\right)j_i = 1+\prod_{u=1}^{u=k-1} j_u - j_i = j_k - j_i$

On obtient la relation : $w_k = 1+\left(q+q^{j_1}+q^{2j_1}+q^{j_k-j_i-1}\right)w_i$ qui est une relation de Bézout prouvant que w_k et w_i sont des entiers premiers entre eux.
La suite (w_k) est extraite de la suite (s_n) et chaque terme est premier avec ses précédents. *On note que cette extraction ne dépend pas de l'entier q.*

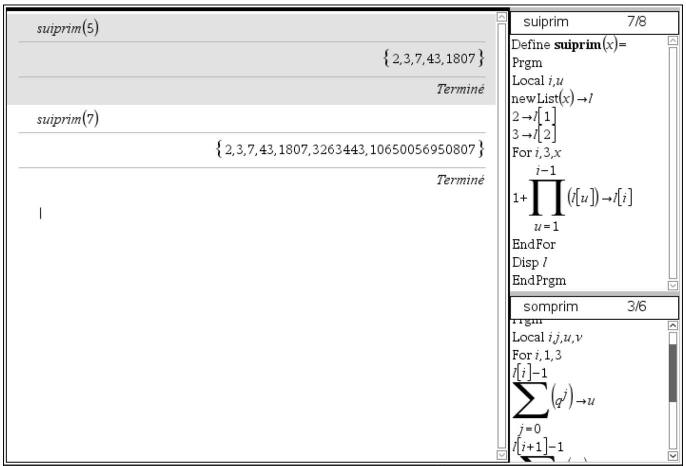
Puisque ces entiers w_k sont premiers entre eux, les ensembles de leurs diviseurs autres que 1 sont des ensembles disjoints. Un entier non nul quelconque n'aura de diviseurs communs autres que 1 qu'avec un nombre fini d'entre eux.

Retour à la question 6
Soit *m* un nombre « mauvais ». Il admet au moins un bloqueur ω dont toute attribution est un entier non divisible par *m*. Soit *n* la longueur de ω.
On peut s'intéresser aux mots obtenus en accolant les uns aux autres des « ω ».

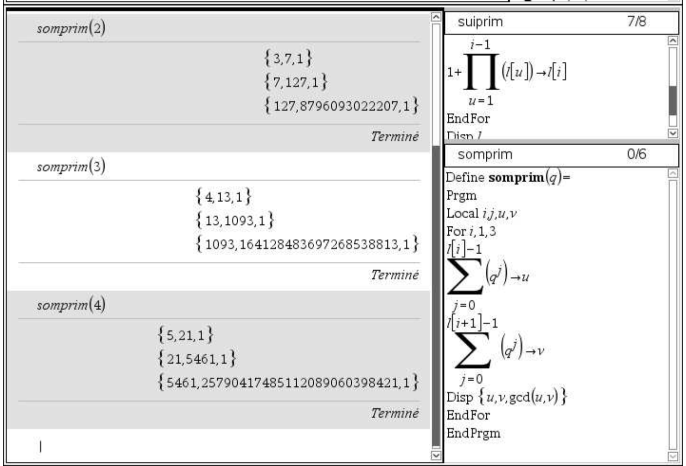
Si on considère par exemple le mot $\omega\omega$, à toute attribution *a* de ω correspond une attribution $\overline{aa} = a\times\left(1+10^n\right)$ de ce mot. Dans le cas où *m* est premier avec $1+10^n$, l'entier *m* ne peut diviser $a\times\left(1+10^n\right)$, sinon d'après le théorème de Gauss, puisqu'il est premier avec $1+10^n$, il diviserait *a*, ce qui est exclu. Le mot $\omega\omega$ est dans ce cas lui aussi un bloqueur de *m*.

Si plus généralement on considère le mot $\omega\omega\ldots\omega$ où ω est répété *k* fois $(k>1)$, à toute attribution *a* de ω correspond une attribution $\overline{aa....a} = a\times\left(1+10^n+\ldots+10^{(k-1)n}\right)$ de ce mot.
On reconnaît une expression de la forme : $\overline{aa....a} = a\times s_k$ vue dans le lemme avec $q=10^n$

En particulier, si on effectue j_k répétitions (avec les notations du lemme) : $\overline{aa....a} = a\times w_k$
L'entier *m* ne possède qu'un nombre fini de diviseurs. Il n'admet donc de diviseurs communs autres que 1 qu'avec un nombre fini d'entiers w_k et il est premier avec tous les autres. Pour tous ceux-là (il y en a une infinité), *m* ne peut diviser $a\times w_k$ sinon, d'après le théorème de Gauss il diviserait *a* ce qui est exclu. Les mots ainsi formés sont tous des bloqueurs de *m*.

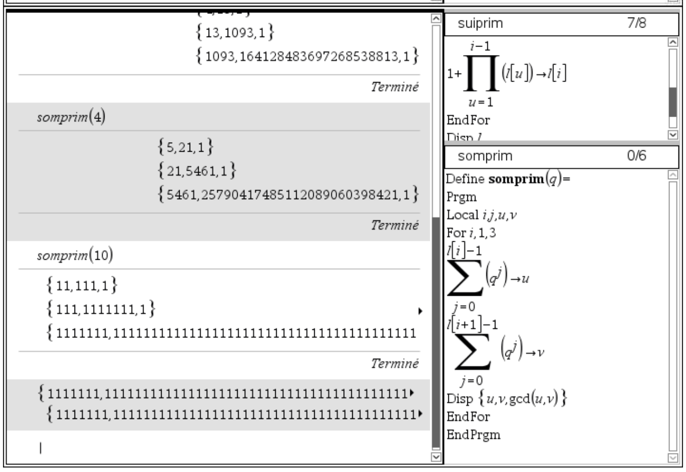


Le programme **suiprim** génère les premiers entiers j_k. Les trois entiers suivant 2, 3, 7 et 43 indiqués dans l'énoncé sont 1807, 3263443, 10650056950807[1].



Le programme **somprim** affecté de l'argument q génère les quatre premiers termes w_k. Il affiche deux termes consécutifs et le PGCD de ces deux termes (on constate que le PGCD de deux termes consécutifs est bien 1 à chaque fois mais il faudrait vérifier tous les PGCD deux à deux).

Les capacités de test que ce programme fournit sont évidemment assez limitées. On a exécuté ce programme pour les valeurs 2, 3, 4 de q. Les termes w_k obtenus dépassent rapidement les capacités d'affichage puis celles de calcul.



Exécuté avec $q=10$ on voit s'afficher, comme on pouvait s'y attendre, quatre guirlandes de « 1 », de longueurs respectives 2, 3 ; 7 puis 43. La cinquième « guirlande » aurait 1807 chiffres.

Le dernier « 1 » isolé représente le PGCD de deux termes consécutifs et indique que ces entiers sont premiers entre eux (mais il faudrait les tester deux à deux).

[1] La suite ainsi construite porte le nom de « suite de Sylvester » du nom du mathématicien anglais James Joseph Sylvester (1814 - 1897).