Problème 1 : Comparaison n'est pas raison

Dans ce problème, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$. Par commodité, on pourra simplement noter u la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Étant données deux suites u et v de $\mathscr{S}$, on notera $u \leqslant v$ le fait que $u_k \leqslant v_k$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Par ailleurs, on notera $u \ll v$ le fait que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = 0\,;$$

on dira alors que u est *négligeable* devant v.

Partie 1 : Introduction à la comparaison de suites

1) Soit u, v et w trois suites de $\mathscr{S}$.
   a) Démontrer que, si $u \ll v$ et $v \ll w$, alors $u \ll w$.
   b) Peut-on avoir $u \ll v$ et $v \ll u$?
   c) Démontrer que, si $u \leqslant v$ et $v \ll w$, alors $u \ll w$.
   d) Si $u \ll v$, a-t-on nécessairement $u \leqslant v$?
   e) Démontrer que, si $u \ll v$, alors $\dfrac{1}{v} \ll \dfrac{1}{u}$.
2) Démontrer, pour toute suite u de $\mathscr{S}$, qu'il existe deux suites a et A de $\mathscr{S}$ telles que $a \ll u \ll A$.
3) Soit u, v, w, r et s les cinq suites de $\mathscr{S}$ telles que

$$u_k = k^2,\ v_k = k^3,\ w_k = e^k,\ r_k = \sqrt{k^5} \text{ et } s_k = 100k + k^2$$

   pour tout entier $k \geqslant 1$.
   a) La suite u est-elle négligeable devant s ? La suite s est-elle négligeable devant u ?
   b) Parmi ces cinq suites, lesquelles sont négligeables devant lesquelles ?
      On n'exigera aucune justification.
4) Soit u et v deux suites de $\mathscr{S}$ telles que $u \ll v$. Démontrer qu'il existe une suite h dans $\mathscr{S}$ telle que $u \ll h \ll v$ dans les cas suivants :
   a) lorsque $u_k = 1$ et $v_k = \sqrt{k}$ pour tout entier $k \geqslant 1$;
   b) en général.

Partie 2 : Échelle de comparaison et encadrement

Dans les parties 2 et 3, on s'intéresse à plusieurs suites à la fois. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on se donne donc une suite $u^{(n)}$ de $\mathscr{S}$. En particulier, la notation $u_k^{(n)}$ désigne le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite $u^{(n)}$.

On dit alors que les suites $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \ldots$ forment une *échelle de comparaison* si

$$u^{(1)} \ll u^{(2)} \ll u^{(3)} \ll \cdots,$$

c'est-à-dire si $u^{(n)} \ll u^{(n+1)}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Par ailleurs, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $M^{(n)}$ la suite $\max\{u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(n)}\}$: il s'agit de la suite telle que

$$M_k^{(n)} = \max\left\{u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \cdots, u_k^{(n)}\right\}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. Enfin, on note D la suite telle que $D_k = M_k^{(k)}$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

5) a) Démontrer que les suites $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ définies par $u_k^{(n)} = k^n$ pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ forment une échelle de comparaison.

b) Déterminer des suites $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ de $\mathscr{S}$ qui sont toutes de limite nulle et qui forment une échelle de comparaison.

6) On suppose, dans cette question uniquement, que les suites $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ forment une échelle de comparaison.

a) Démontrer que les suites $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \dots$ forment une échelle de comparaison.

b) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $M^{(n)} \ll D$ et $u^{(n)} \ll D$.

7) Les suites $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ sont désormais des éléments quelconques de $\mathscr{S}$. Démontrer qu'il existe deux suites a et A dans $\mathscr{S}$ telles que $a \ll u^{(n)} \ll A$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

8) Soit $\mathscr{E}$ un ensemble quelconque de suites de $\mathscr{S}$. Existe-t-il nécessairement deux suites de $\mathscr{S}$, soient a et A, telles que $a \ll u \ll A$ pour toute suite u dans $\mathscr{E}$?

Partie 3 : Intercalage arbitraire

Soit $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ et $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, \dots$ des suites de $\mathscr{S}$ telles que $u^{(n)} \ll v^{(p)}$ pour tous les entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$.

9) On suppose, dans cette question uniquement, que $u^{(1)} \leqslant u^{(2)} \leqslant u^{(3)} \leqslant \cdots$ et que $v^{(1)} \geqslant v^{(2)} \geqslant v^{(3)} \geqslant \cdots$

a) Démontrer qu'il existe un entier $\ell_1 \geqslant 1$ tel que $u_k^{(1)} \leqslant v_k^{(1)}$ pour tout entier $k \geqslant \ell_1$.

b) Soit $n \geqslant 1$ et $\ell_n \geqslant 1$ deux entiers tels que $n u_k^{(n)} \leqslant v_k^{(n)}$ pour tout entier $k \geqslant \ell_n$. Démontrer qu'il existe un entier $\ell_{n+1} \geqslant \ell_n + 1$ tel que $(n+1) u_k^{(n+1)} \leqslant v_k^{(n+1)}$ pour tout entier $k \geqslant \ell_{n+1}$.

c) Construire une suite h de $\mathscr{S}$ telle que $u^{(n)} \ll h \ll v^{(n)}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

10) On suppose désormais que les suites $u^{(n)}$ et $v^{(p)}$ sont des suites quelconques de $\mathscr{S}$. Démontrer qu'il existe une suite h de $\mathscr{S}$ telle que $u^{(n)} \ll h \ll v^{(p)}$ pour tous les entiers $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$.

11) Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux ensembles quelconques de suites de $\mathscr{S}$. On suppose que $u \ll v$ pour toutes les suites u dans $\mathscr{E}$ et v dans $\mathscr{F}$. Existe-t-il nécessairement une suite h dans $\mathscr{S}$ telle que $u \ll h \ll v$ pour toutes les suites u dans $\mathscr{E}$ et v dans $\mathscr{F}$?

Problème 2 : Marche hasardeuse

Jacques a écrit l'entier 1 au tableau. Puis, chaque minute, il effectue l'opération suivante : si le nombre écrit au tableau vaut k, il l'efface et le remplace par un entier choisi uniformément au hasard, et indépendamment des choix précédents, parmi les entiers $0, 1, 2, 3, \ldots, 2k$. On s'intéresse à la probabilité qu'aura Jacques d'écrire un jour l'entier 0 au tableau, et au nombre moyen de minutes qui auront passé avant qu'il n'écrive pour la première fois un 0 au tableau, si jamais il le fait un jour.

Dans ce problème, pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit la variable aléatoire X_n comme le nombre écrit par Jacques au bout de n minutes. On note également p_n la probabilité $\mathbf{P}[X_n = 0]$. Par exemple, $p_0 = 0$, car $X_0 = 1$.

Partie 1 : Quelques propriétés préliminaires

1) Démontrer que, si Jacques écrit l'entier 0 à un moment donné, il sera ensuite condamné à toujours réécrire l'entier 0.
2) Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et en déduire la probabilité p_1.
3) Calculer la probabilité p_2.
4) La suite $(p_n)_{n \geqslant 0}$ admet-elle une limite ?
5) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que la variable aléatoire X_n prend ses valeurs parmi les entiers $0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n$.
6) Démontrer, pour tous les entiers $n \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, que $\mathbf{P}[X_{n+1} = X_n + k] = \mathbf{P}[X_{n+1} = X_n - k]$.
   On pourra commencer par étudier le cas où X_n est égal à un entier ℓ donné.
7) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'espérance $\mathbf{E}[X_{n+1} - X_n]$.
8) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que $\mathbf{E}[X_n] = 1$.

Partie 2 : Probabilité de retour

Dans cette partie, on cherche à démontrer que Jacques a une probabilité 1 d'écrire un jour l'entier 0 au tableau. Pour ce faire, et jusqu'à la question 11) incluse, on considère un entier $n \geqslant 0$ fixé.
Pour tout entier $k \geqslant 0$, on pose alors

$$q_k = \mathbf{P}[X_n = k], \; r_k = \sqrt{\frac{q_k}{2k+1}} \text{ et } s_k = k\sqrt{\frac{q_k}{2k+1}} ;$$

on a donc $q_0 = p_n$. Enfin, on note a, b et c les sommes définies par

$$a = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots + r_{2^n}^2, \; b = r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 + \cdots + r_{2^n} s_{2^n} \text{ et } c = s_1^2 + s_2^2 + s_3^3 + \cdots + s_{2^n}^2.$$

9) Exprimer le polynôme
$$Q(X) = (r_1 + X s_1)^2 + (r_2 + X s_2)^2 + (r_3 + X s_3)^2 + \cdots + (r_{2^n} + X s_{2^n})^2$$
$= a + 2bX + cX^2$
   et son discriminant en fonction de a, b et c, puis en déduire que $b^2 \leqslant ac$. $\Delta = 4b^2 - 4ac$.
10) Démontrer que $a = p_{n+1} - p_n$, $b = \dfrac{1 - p_{n+1}}{2}$ et $c = \dfrac{1 + p_{n+1}}{4}$.
11) Démontrer que $p_n \geqslant \dfrac{n}{n+2}$.
12) Démontrer que Jacques a effectivement une probabilité 1 d'écrire un jour l'entier 0 au tableau.

Partie 3 : Suites et fonctions

Dans cette partie, on s'intéresse tout d'abord aux fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(2x+1) - \ln(2x-1) - \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = 12\ln(2x+1) - 12\ln(4x+3) + \frac{17x+13}{2x+1}.$$

13) Étudier le signe et les variations de la fonction g sur l'intervalle $[1,+\infty[$, ainsi que son éventuelle limite en $+\infty$.

14) Démontrer que $h(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \geqslant 4$.

On considère un entier $n \geqslant 1$ fixé. On note H_n le $n^{\text{ème}}$ nombre *harmonique*, défini comme la somme $H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. On pose également $t_n = (9 + 24H_n)/7$.

15) Démontrer que $H_1 + H_2 + H_3 + \cdots + H_n = (n+1)(H_{n+1} - 1)$.

16) Démontrer que $(2n+1)(t_n - 1) \geqslant t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{2n}$ dans les deux cas suivants :

   a) lorsque $1 \leqslant n \leqslant 3$;

   b) lorsque $n \geqslant 4$.

Partie 4 : Cinq minutes, montre en main

On cherche enfin à démontrer que Jacques mettra en moyenne moins de cinq minutes pour écrire l'entier 0 au tableau. Pour ce faire, on généralise le processus étudié jusqu'alors, en supposant simplement que Jacques est parti d'un entier $\ell \geqslant 1$, qui n'est donc plus nécessairement égal à 1 ; autrement dit, $X_0 = \ell$. On définit, dans ce cadre plus général, la variable aléatoire $T_{\ell,+\infty}$ comme suit : il s'agit du nombre de minutes qui se seront écoulées avant que Jacques n'écrive l'entier 0 pour la première fois, ou bien $+\infty$ si Jacques n'écrit jamais l'entier 0. Cette variable aléatoire est à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,\ldots\} \cup \{+\infty\}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose également $T_{\ell,n} = \min\{T_{\ell,+\infty}, n\}$; il s'agit d'une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$.

17) Démontrer que $\mathbf{P}[T_{1,+\infty} = +\infty] = 0$.

18) Démontrer, pour tous les entiers $\ell \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, que

$$\mathbf{E}[T_{\ell,n+1}] = 1 + \frac{\mathbf{E}[T_{1,n}] + \mathbf{E}[T_{2,n}] + \mathbf{E}[T_{3,n}] + \cdots + \mathbf{E}[T_{2\ell,n}]}{2\ell+1}.$$

19) Démontrer, pour tous les entiers $\ell \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, que $\mathbf{E}[T_{\ell,n}] \leqslant t_\ell$, puis que $\mathbf{P}[T_{\ell,n} = n] \leqslant t_\ell / n$.

20) Calculer, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, la probabilité $\mathbf{P}[T_{\ell,+\infty} = +\infty]$.

Même si la variable aléatoire $T_{1,+\infty}$ a une probabilité 1 d'être finie, elle peut prendre une infinité de valeurs entières : elle n'est pas bornée. Calculer sa valeur « moyenne », c'est-à-dire la durée « moyenne » que mettra Jacques pour écrire l'entier 0 au tableau, n'a pas nécessairement de sens a priori. En s'inspirant de la définition usuelle de l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives, on identifie cette valeur moyenne à la limite de la suite croissante $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbf{P}[T_{1,+\infty} = k]$$

pour tout entier $n \geqslant 0$; cette limite est soit un nombre réel positif, soit $+\infty$, selon que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ou non.

21) Démontrer que, s'il part de l'entier $X_0 = 1$, Jacques mettra en moyenne moins de cinq minutes à écrire l'entier 0 au tableau.

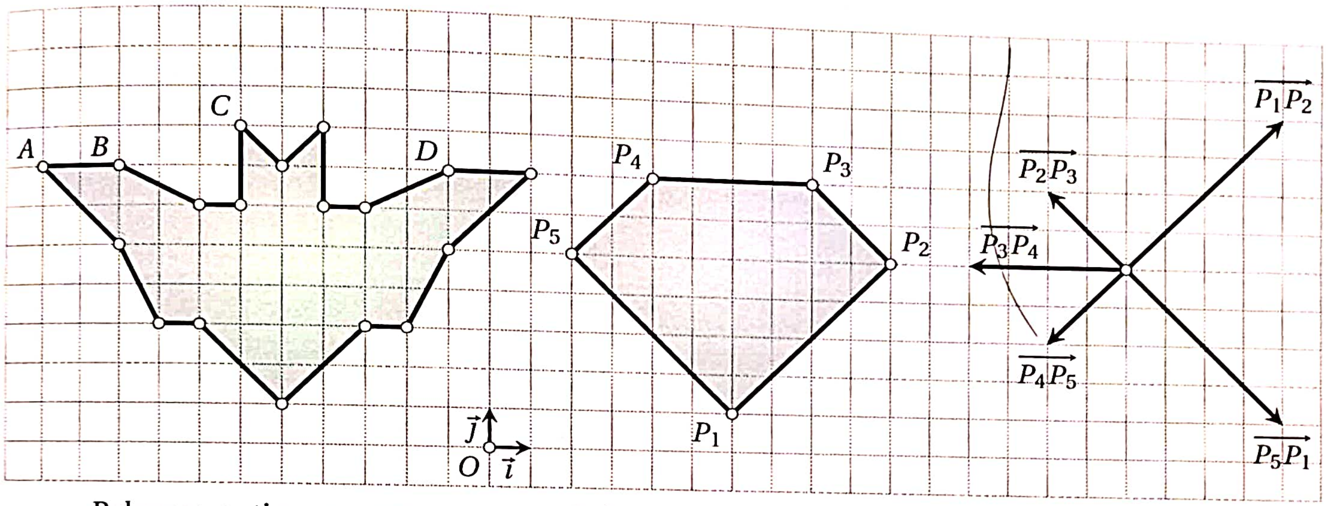
Épilogue : En utilisant des techniques analogues à celles développées ici mais calculatoirement plus poussées, on peut en fait démontrer que le temps d'attente moyen avant que Jacques n'écrive l'entier 0 au tableau, mesuré en minutes, vaut approximativement 4,672. Cette durée est néanmoins significativement plus grande que le temps d'attente *médian* de Jacques : dans la moitié des cas, Jacques mettra deux minutes ou moins à écrire l'entier 0 au tableau.

Problème 3 : Aire minimale d'un n-gone convexe à sommets entiers

Dans tout le problème, le plan est rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Un point du plan, de coordonnées (x, y), est dit *entier* lorsque x et y sont des entiers. Un polygone du plan est dit *entier* lorsque tous ses sommets sont des points entiers.

Par ailleurs, un polygone $P_1P_2\cdots P_n$ est dit *convexe* lorsqu'il ne possède pas trois sommets alignés et que tout segment qui relie deux points de son bord est entièrement contenu à l'intérieur du polygone ou sur son bord. En particulier, si les sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ont été numérotés dans le sens trigonométrique, les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \ldots, \overrightarrow{P_{n-1}P_n}, \overrightarrow{P_nP_1}$ sont triés dans le sens trigonométrique.

Des exemples de tels polygones sont représentés ci-dessous. Le polygone de gauche n'est pas convexe, parce que ses sommets A, B et D sont alignés, ou encore parce que le segment $[BC]$ n'est pas contenu à l'intérieur du polygone. Le polygone $P_1P_2P_3P_4P_5$ est convexe, et les cinq vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_5P_1}$ sont bien triés dans le sens trigonométrique.



Polygone entier non convexe — Polygone entier convexe — Vecteurs triés dans le sens trigonométrique

L'objectif de ce problème est de démontrer les deux résultats suivants :

- ▷ Pour tout entier $n \geqslant 3$, et parmi l'ensemble des polygones convexes entiers à n sommets, il en existe un d'aire minimale. On notera a_n cette aire minimale.
- ▷ Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que, pour tout entier $n \geqslant 3$, on ait

$$c_1 n^3 \leqslant a_n \leqslant c_2 n^3.$$

Partie 1 : Calculer l'aire d'un triangle

On souhaite tout d'abord démontrer que, lorsque A, B et C sont trois points de coordonnées (x_a, y_a), (x_b, y_b) et (x_c, y_c), l'aire du triangle ABC est égale à la quantité

$$\frac{|x_a(y_b - y_c) + x_b(y_c - y_a) + x_c(y_a - y_b)|}{2},$$

que l'on notera désormais $\mathscr{A}(A, B, C)$.

1) Démontrer que $\mathscr{A}(A, B, C) = \mathscr{A}(B, C, A) = \mathscr{A}(B, A, C)$.

2) Démontrer que ABC est bien d'aire $\mathscr{A}(A, B, C)$ dans les cas suivants :

   a) lorsque $x_a = x_b$;

   b) lorsque $y_a \geqslant 0$, $y_b \geqslant 0$ et $y_c \geqslant 0$; *on pourra considérer les trapèzes contenant deux des points A, B et C ainsi que leurs projetés orthogonaux sur l'axe des abscisses ;*

   c) en général.

Tournez la page S.V.P.

Partie 2 : Existence de a_n et premières évaluations

Dans toute la suite du problème, on considère un entier $n \geqslant 3$ fixé.

3) Soit $P_1P_2\cdots P_n$ un polygone convexe entier, et soit $\mathscr{S}$ son aire.

   a) En traçant toutes les diagonales $[P_1P_i]$, on découpe notre polygone en triangles. Combien de triangles obtient-on en procédant de la sorte ?

   b) Démontrer que $2\mathscr{S}$ est un entier.

4) Pour chacun des entiers $k = 1,2,\ldots,n$, on note X_k le point de coordonnées (k, k^2). Démontrer que l'aire du polygone convexe $X_1X_2\cdots X_n$ est inférieure ou égale à n^3.

5) Démontrer que, parmi les polygones convexes entiers à n sommets, il en existe un d'aire minimale.

Maintenant acquise l'existence de l'aire a_n, on cherche à évaluer celle-ci.

6) Démontrer que $a_n \geqslant (n-2)/2$.

7) Calculer a_3 et a_4.

Partie 3 : Bornes cubiques

On considère un polygone entier convexe $P_1P_2\cdots P_n$. Pour chacun des entiers $k = 1,2,\ldots,n$, on note Q_k le point tel que $\overrightarrow{OQ_k} = \overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ (avec la convention selon laquelle $P_0 = P_n$).

8) Démontrer que les points Q_k sont entiers.

9) a) Démontrer qu'aucun point Q_k ne coïncide avec O.

   b) Démontrer que, lorsque k et k' sont deux indices distincts, les points Q_k et $Q_{k'}$ n'appartiennent jamais à une même demi-droite issue de O.

Soit P_i et P_j deux des sommets de $P_1P_2\cdots P_n$ les plus éloignés l'un de l'autre. On note Δ la parallèle à (P_iP_j) passant par O et Δ' la perpendiculaire à (P_iP_j) passant par O.

10) Démontrer que l'on peut choisir un repère orthonormé $\mathscr{R}'$ dont Δ est l'axe des abscisses, Δ' est l'axe des ordonnées, et dans lequel au moins un quart des n points Q_k sont à coordonnées positives ou nulles.

Désormais, pour chacun des entiers $k = 1,2,\ldots,n$, on note (x'_k, y'_k) les coordonnées de Q_k dans le repère $\mathscr{R}'$; ces nouvelles coordonnées ne sont pas nécessairement des entiers. On note également $\mathscr{E}$ l'ensemble des indices k pour lesquels $x'_k \geqslant 0$ et $y'_k \geqslant 0$. En outre, on note $\overline{x}$ la moyenne des abscisses x'_k obtenues lorsque $k \in \mathscr{E}$, et $\overline{y}$ la moyenne des ordonnées y'_k obtenues lorsque $k \in \mathscr{E}$.
Enfin, on note $\mathscr{E}'$ l'ensemble des indices k pour lesquels $0 \leqslant x'_k \leqslant 3\overline{x}$ et $0 \leqslant y'_k \leqslant 3\overline{y}$.

11) Démontrer que $\mathscr{E}'$ contient au moins un tiers des éléments de $\mathscr{E}$.

12) Démontrer que $\mathscr{E}'$ contient au plus $18\overline{x}\,\overline{y}+1$ éléments.

13) Démontrer que $P_iP_j \geqslant \dfrac{n\overline{x}}{4}$ et qu'il existe un point P_k à distance au moins $\dfrac{n\overline{y}}{8}$ de la droite (P_iP_j).

14) Démontrer que, si $n \geqslant 24$,
$$a_n \geqslant \frac{n^3}{18\times 24\times 64}.$$

15) En déduire l'existence des constantes c_1 et c_2 mentionnées en préambule de l'énoncé.