Concours général 2018, problème 3 : Des nombres en or

1. Le sujet

On note φ la plus grande racine réelle de l'équation $x^2 = x+1$. Le nombre φ, connu depuis l'Antiquité, est appelé *nombre d'or*.

Un réel x est appelé ***nombre en or*** s'il existe :

- deux entiers naturels p et q
- des entiers $a_p, a_{p-1},..., a_0, a_{-1},..., a_{-q}$ ne prenant que les valeurs 0 ou 1

tels que : $x = a_p\varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + ... + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + ... + a_{-q}\varphi^{-q}$.

Dans ce cas on notera $x \triangleright a_p a_{p-1}...a_0 , a_{-1}...a_{-q}$.

Par exemple si $x = \varphi^3 + \varphi^2 + 1 + \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^4}$, on notera $x \triangleright 1101{,}1001$. On dira alors que $1101{,}1001$ est une ***représentation en or*** de x.

Il est clair que l'on peut ajouter au début ou à la fin de la représentation autant de 0 que l'on souhaite.

Une séquence de la représentation est une suite de 0 et de 1 qui apparaît dans la représentation. Dans l'exemple précédent, 10110 est une séquence de la représentation $1101{,}1001$.

Partie A : Tous les entiers sont en or

1. Montrer que, dans une représentation en or de x, on peut remplacer toute séquence 011 par 100 et réciproquement afin d'obtenir une autre représentation en or de x.

Par exemple, le réel dont une représentation en or est 1101,1001admet également 1110,0001 et 1101,0111 comme représentations en or.
On dira que les deux séquences 011 et 100 sont équivalentes.

2. Plus généralement, donner une séquence dans laquelle il n'a a jamais deux 1 consécutifs et qui soit équivalente à la séquence 0111…11 où il y a n occurrences du chiffre 1.

3. Montrer que les entiers 2 et 3 sont des nombres en or et en donner une représentation en or.

4. Montrer que tous les entiers naturels admettent une représentation en or.

Partie B : Représentation en or pur

On dira qu'une représentation $x \triangleright a_p a_{p-1} ... a_0 , a_{-1} ... a_{-q}$ d'un nombre en or est ***en or pur*** si pour tout *i*, $a_i\, a_{i+1} = 0$.
En d'autres termes une représentation de *x* est en or pur si elle ne contient jamais deux 1 consécutifs.

Soit *x* un réel non nul qui admet une représentation en or $x \triangleright a_p a_{p-1} ... a_0 , a_{-1} ... a_{-q}$. On définit la ***teneur en or*** de la représentation comme étant l'exposant de la plus grande puissance de φ dont le coefficient vaut 1 dans l'égalité $x = a_p \varphi^p + a_{p-1}\varphi^{p-1} + ... + a_1\varphi + a_0 + a_{-1}\varphi^{-1} + ... + a_{-q}\varphi^{-q}$.
Par exemple la teneur en or de la représentation 1101,1001 est égale à 3 et celle de 0,0010 est égale à -3.

1. Donner une représentation en or pur des entiers 2, 3, 4 et 5.

2. Soit *x* un réel ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à *n*.

2.1. Montrer que $\varphi^n \le x < \varphi^{n+1}$.

2.2. Montrer que la représentation en or pur d'un réel, si elle existe, est unique.

3. Soit *x* un réel non nul ayant une représentation en or pur.

3.1. Exprimer la teneur en or de la représentation en or pur de *x* à l'aide des fonctions logarithme népérien et partie entière.

3.2. Ecrire un algorithme permettant d'obtenir cette représentation.

3.3. Appliquer votre algorithme pour $x = 2018$.

4. Montrer qu'un réel en or possède forcément une représentation en or pur.

5. Montrer qu'il existe des réels strictement positifs qui ne sont pas en or.

2. Quelques indications

Partie A : Tous les entiers sont en or

1. La relation $\varphi^2=\varphi+1$ induit la relation plus générale : $\varphi^{k+2}=\varphi^{k+1}+\varphi^k$ quel que soit l'entier relatif *k*.

2. Lorsque une séquence présente plusieurs 1 consécutifs :

Trois 1 consécutifs : $\overline{0111}\cong\overline{1001}$

Quatre 1 consécutifs : $\overline{01111}\cong\overline{10011}\cong_{gj}\overline{10100}$

Ci-contre, quelques exemples d'écritures équivalentes. On conjecture une différence de traitement, suivant qu'il y a un nombre pair ou un nombre impair de « 1 » consécutifs.

f	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$1+f=f^2$	true
$1+f+f^2=f^3+1$	true
$1+f+f^2+f^3=f^2+f^4$	true
$1+f+f^2+f^3+f^4=1+f^3+f^5$	true
$1+f+f^2+f^3+f^4+f^5=f^2+f^4+f^6$	true
$1+f+f^2+f^3+f^4+f^5+f^6=1+f^3+f^5+f^7$	true
©gilbertjulia2018	
	7/99

3. Ci-contre, la capture d'écran exhibe des représentations en or des entiers 2 et 3 (ce qui montre que ces entiers sont des nombres en or) :
2 admet la représentation 10,01 et 3 admet la représentation 11,01.

Define $f=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	*Terminé*
$\frac{1}{f}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
$f+\frac{1}{f^2}$	2
$f+1+\frac{1}{f^2}$	3
©gilbertjulia2018	

En tenant compte de la relation $\varphi^2=\varphi+1$, on obtient une représentation en or pur de 3, la représentation 100,01 et, au même prix, une représentation en or pur de 4, la représentation 101,01.

$f+1+\frac{1}{f^2}$	3
©gilbertjulia2018	
$f^2+\frac{1}{f^2}$	3
$f^2+1+\frac{1}{f^2}$	4

4. On remarque que les premiers entiers ont chacun une représentation en or dans laquelle le coefficient de φ^0 est nul. Ainsi $1 \triangleright 0{,}11$ et $2 \triangleright 10{,}01$

On peut essayer de démontrer un lemme utile, à savoir que si un nombre réel x admet une représentation en or, alors on peut toujours s'arranger pour que le coefficient a_0 de φ^0 dans sa représentation soit nul.

Pour cela, en supposant que $a_0 = 1$, plusieurs cas seront à distinguer pour transformer ce coefficient en zéro :

- $a_{-1} = 1$.
- $a_{-1} = 0$ et $a_{-2} = 0$.
- $a_{-1} = 0$ et $a_{-2} = 1$, le plus délicat. Noter que l'alternance $x \triangleright ...1{,}01010101...$ de zéros et de « 1 » ne peut pas continuer éternellement …

Partie B : Représentation en or pur

2.1. Soit un réel x strictement positif ayant une représentation en or pur de teneur en or l'entier n.
Les deux premiers coefficients de cette représentation sont : $a_n = 1$; $a_{n-1} = 0$ et on ne sait rien des coefficients suivants sinon qu'il n'y a jamais deux 1 consécutifs : $x \triangleright 10a_{n-2}\,a_{n-3}...$
Soit $x = \varphi^n + a_{n-2}\varphi^{n-2} + ...$ l'égalité associée à cette représentation.

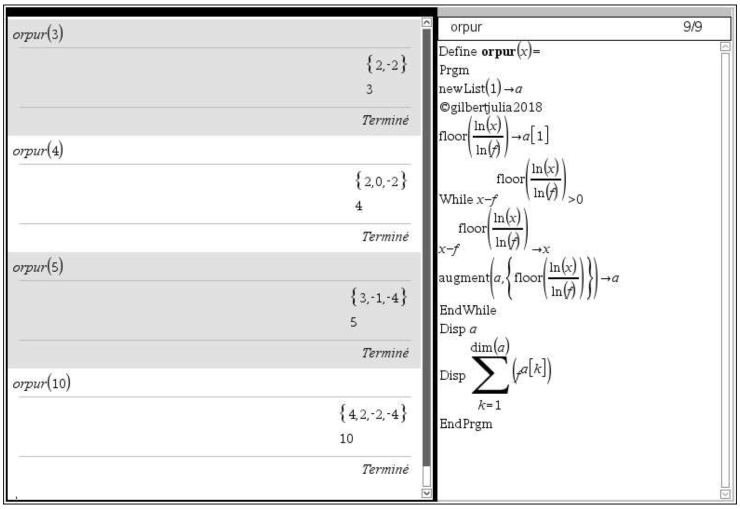
On suppose qu'il y a p coefficients égaux à 1 dans cette représentation diversement répartis (mais jamais deux consécutifs).
Montrer que $\varphi^n \leq x \leq \varphi^n + \varphi^{n-2} + \varphi^{n-4} + ... + \varphi^{n-2p}$ et en déduire que $\varphi^n \leq x < \varphi^n \dfrac{1}{1-\varphi^{-2}}$. Conclure.

2.2. Déduire du **2.1** que deux représentations en or pur du même nombre ont nécessairement la même teneur en or. On peut alors s'intéresser à des représentations en or pur de $x - \varphi^n$. Puis, s'il y a lieu, recommencer.

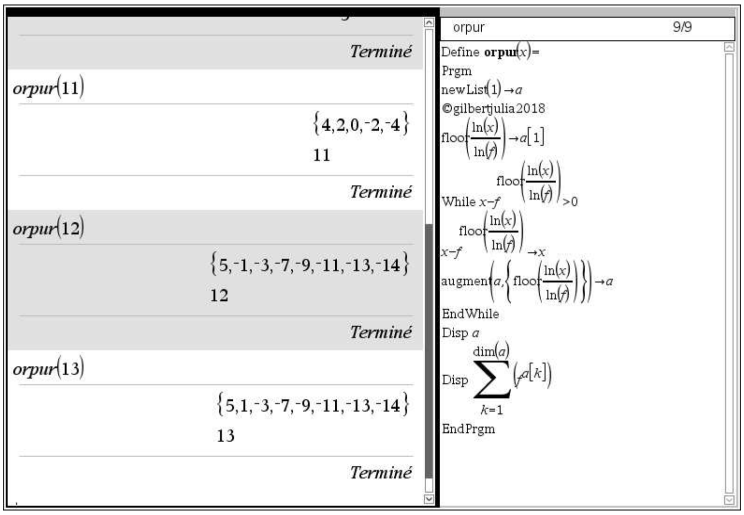
Le programme **orpur** renvoie sous forme de liste les indices pour lesquels le coefficient de la représentation en or pur est égal à 1.

Le programme, à titre de vérification, calcule effectivement la somme des puissances de φ correspondantes.

Les résultats affichés pour des petites valeurs entières de x corroborent les résultats obtenus ci-dessus pour 3 et 4. En prime, les représentations en or pur de 5 et de 10.

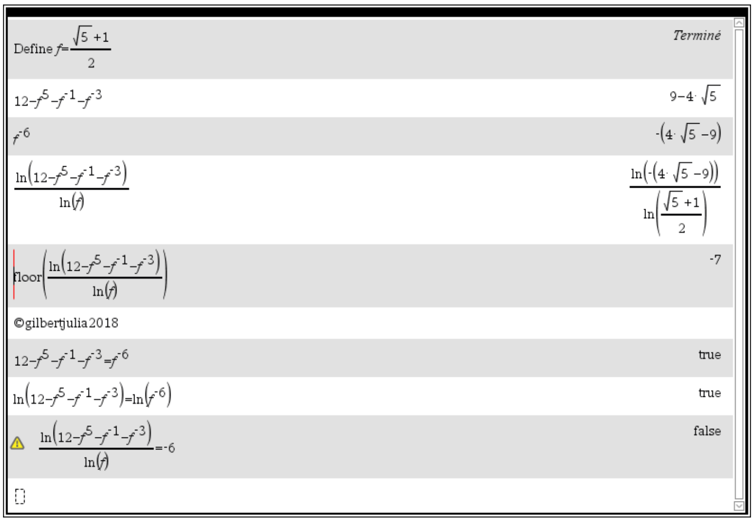


Il convient cependant de se montrer très prudent avec ce programme.



La condition « While $x-\varphi^{\left\lfloor \frac{\ln x}{\ln\varphi}\right\rfloor}>0$ » semble très instable et n'est pas formellement déterminante.

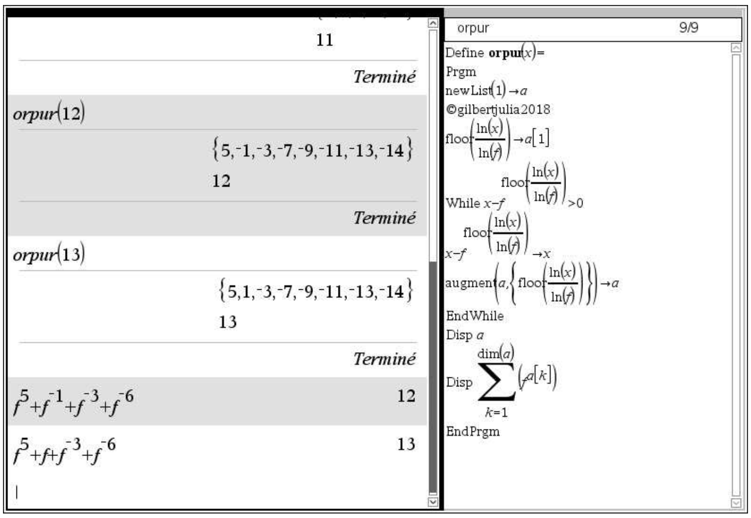
Aussi, ce programme est très rapidement mis en échec. On peut constater ci-contre qu'à notre grande déception les résultats affichés pour 12 et pour 13 ne sont pas les représentations en or pur attendues.



La raison de cette instabilité semble être que, pour une raison que j'ignore, TI*n*SpireCAS ne reconnaît pas des relations formelles du type : $\dfrac{\ln\left(12-\varphi^{5}-\varphi^{-1}-\varphi^{-3}\right)}{\ln\varphi}=-6$ comme en témoignent les lignes contradictoires affichées sur cette capture d'écran.

Probablement un changement de mode de calcul et/ou une gestion peu performante des arrondis (?).

De ce fait, la fonction **floor** renvoie un résultat erroné.

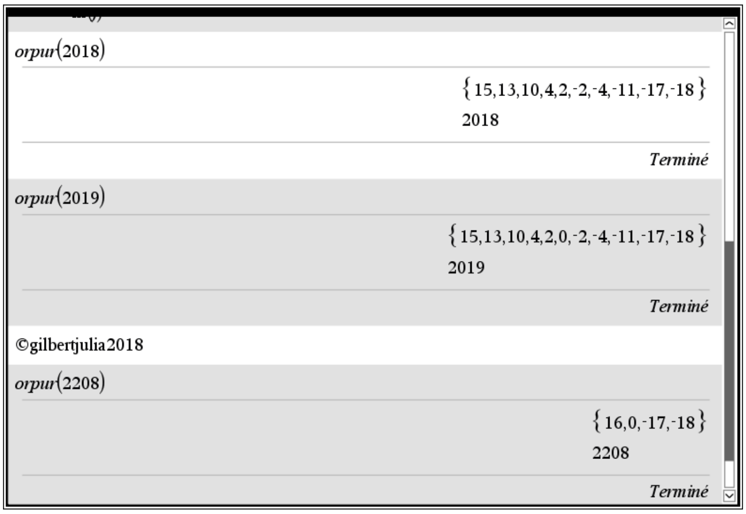


Ci-contre, les résultats corrects attendus pour 12 et pour 13.

Il appartient au lecteur de trouver un logiciel plus fiable que le mien … ou un meilleur programme.

Voici les résultats (tous erronés) affichés pour 2018, 2019 et 2208 (ce dernier à titre d'exemple parce que sa teneur en or est égale à 16 et non plus à 15).

Il reste à les corriger.



5. L'ensemble des nombres réels ayant une représentation en or est inclus dans l'ensemble des nombres qui s'écrivent $r_1 + r_2\sqrt{5}$ où r_1 et r_2 sont des nombres rationnels, lequel ensemble est un sous-corps strict de $\mathbf{R}$.