Concours général 2018, problème 3 : Des nombres en or

Eléments de correction

Partie A : Tous les entiers sont en or

1. La relation $\varphi^2=\varphi+1$ induit la relation plus générale : $\varphi^{k+2}=\varphi^{k+1}+\varphi^k$ quel que soit l'entier relatif k.
Soit un réel x admettant une représentation en or : $x=a_p\,\varphi^p+...+a_1\,\varphi+a_0+a_{-1}\,\varphi^{-1}+...+a_{-q}\,\varphi^{-q}$.

Supposons que la séquence 100 soit présente quelque part dans cette représentation.

Il existe un entier relatif k tel que $p-2\geq k\geq -q$ et : $a_{k+2}=1\,;a_{k+1}=a_k=0$
Alors : $x=a_p\,\varphi^p+...+a_{k+3}\,\varphi^{k+3}+\varphi^{k+2}+a_{k-1}\,\varphi^{k-1}+...+a_{-q}\,\varphi^{-q}$
$x=a_p\,\varphi^p+...a_{k+3}\,\varphi^{k+3}+\left(\varphi^{k+1}+\varphi^k\right)+a_{k-1}\,\varphi^{k-1}+...+a_{-q}\,\varphi^{-q}$ est une autre représentation en or dans laquelle la séquence 100 présente aux rangs k à $k+2$ a été remplacée par la séquence 011.

Réciproquement, supposons que la séquence 011 soit présente quelque part dans cette représentation.
Il existe un entier relatif k tel que $p-1\geq k\geq -q$ et : $a_{k+2}=0\,;a_{k+1}=a_k=1$
Alors : $x=a_p\,\varphi^p+...a_{k+3}\,\varphi^{k+3}+\varphi^{k+1}+\varphi^k+a_{k-1}\,\varphi^{k-1}+...+a_{-q}\,\varphi^{-q}$.
$x=a_p\,\varphi^p+..._{gjulia}+a_{k+3}\,\varphi^{k+3}+\varphi^{k+2}+a_{k-1}\,\varphi^{k-1}+...+a_{-q}\,\varphi^{-q}$ est une autre représentation en or dans laquelle la séquence 011 présente aux rangs k à $k+2$ a été remplacée par la séquence 100.
(On remarque qu'il se peut que, dans cette nouvelle représentation, $a_{p+1}=1$ dans le cas où $a_p=a_{p-1}=1$ et qu'on se soit intéressé à ce cas).

2. Lorsque une séquence présente plusieurs « 1 » consécutifs :
Soit p un entier strictement positif.

Des relations : $_{gjulia\,2018}\begin{cases}\varphi^2=1+\varphi\\ \varphi^4=\varphi^2+\varphi^3\\ \varphi^6=\varphi^4+\varphi^5\\ ...\\ \varphi^{2p}=\varphi^{2p-2}+\varphi^{2p-1}\end{cases}$ on déduit, par addition membre à membre : $\sum_{j=0}^{2p-1}\varphi^j=\sum_{j=1}^{p}\varphi^{2j}$

C'est-à-dire : $1+\varphi+...+\varphi^{2p-1}=\varphi^2+\varphi^4+...+\varphi^{2p}$. Dans la somme de gauche, il y a un nombre pair de termes.

Si on ajoute un terme à la somme de gauche : $\sum_{j=0}^{2p}\varphi^j=1+\varphi\left(\sum_{j=0}^{2p-1}\varphi^j\right)=1+\varphi\left(\sum_{j=1}^{p}\varphi^{2j}\right)=1+\sum_{j=1}^{p}\varphi^{2j+1}$.

C'est-à-dire : $1+\varphi+...+\varphi^{2p}=1+\varphi^3+\varphi^5+...+\varphi^{2p+1}$. Dans la somme de gauche, il y a un nombre impair de termes.

On suppose que, dans l'écriture dorée d'un nombre *x*, il apparaît une séquence de plusieurs 1 consécutifs. Il existe un entier *k* tel que : $a_k = a_{k+1} = ... = a_{k+n} = 1$; $a_{k+n+1} = 0$:

Lorsque *n* est un nombre pair, $n = 2p$: $x = ... + a_{k-1}\varphi^{k-1} + \sum_{j=0}^{j=2p-1} \varphi^{k+j} + a_{k+2p+1}\varphi^{k+2p+1} + ...$

Dans ce cas :

$$x = ... + a_{k-1}\varphi^{k-1} + \varphi^k \sum_{j=0}^{j=2p-1} \varphi^j + a_{k+2p+1}\varphi^{k+2p+1} + ... \underset{gilbrtjulia2018}{=} ...a_{k-1}\varphi^{k-1} + \varphi^k \sum_{j=1}^{j=p} \varphi^{2j+k} + a_{k+2p+1}\varphi^{k+2p+1} + ...$$

Dans l'écriture de *x*, la séquence de longueur $(2p+1)$ où figurent $2p$ chiffres « 1 » consécutifs : « 011…11 » a été remplacée par la séquence 1010…10100 de même longueur où figurent *p* séquences « 10 », la dernière suivie d'un « 0 ».

Lorsque *n* est un nombre impair, $n = 2p+1 \geq 3$: $x = ...a_{k-1}\varphi^{k-1} + \sum_{j=0}^{j=2p} \varphi^{k+j} + a_{k+2p+2}\varphi^{k+2p+2} + ...$

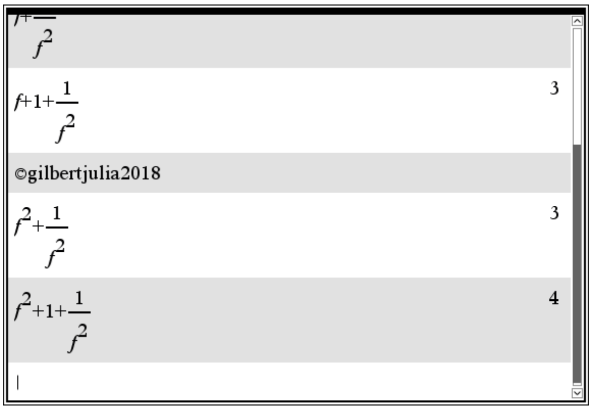
Dans ce cas :

$$x = ...a_{k-1}\varphi^{k-1} + \varphi^k \sum_{j=0}^{j=2p} \varphi^j + a_{k+2p+2}\varphi^{k+2p+2} + ... \underset{gj}{=} ...a_{k-1}\varphi^{k-1} + \varphi^k \left(1 + \sum_{j=1}^{j=p} \varphi^{2j+1}\right) + a_{k+2p+2}\varphi^{k+2p+2} + ...$$

Dans l'écriture de *x*, la séquence de longueur $(2p+2)$ où figurent $(2p+1)$ chiffres « 1 » consécutifs : « 011…11 » a été remplacée par la séquence « 1010…101001 » de même longueur où figurent *p* séquences « 10 », la dernière suivie d'une séquence « 01 ».

3. $2 \triangleright 10{,}01$ (représentation en or pur) **et** $3 \triangleright 11{,}01$

En tenant compte de la relation $\varphi^2 = \varphi + 1$, on obtient une représentation en or pur de 3, la représentation $3 \underset{gj}{\triangleright} 100{,}01$ et, au même prix, une représentation en or pur de 4, la représentation $4 \underset{gj}{\triangleright} 101{,}01$



4. On note que : $1 = \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$, une représentation en or de 1 est : $1 \triangleright 0{,}11$

On a noté aussi que : $2 = 1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2} = \varphi + \varphi^{-2}$ et que : $2 \triangleright 10{,}01$ puis que $3 \underset{gj}{\triangleright} 100{,}01$

Dans chacun de ces trois exemples, le coefficient a_0 de φ^0 est nul, et chaque fois, on peut obtenir au même prix une représentation en or de l'entier suivant.

On va démontrer un lemme, à savoir que si un nombre réel *x* admet une représentation en or, alors on peut toujours s'arranger pour que le coefficient a_0 de φ^0 soit nul.

Supposons que $a_0 = 1$. On va distinguer plusieurs cas :

Premier cas : $a_{-1} = 1$**.** Alors a_0 est l'avant dernier élément d'une séquence de « 1 » consécutifs (au moins deux consécutifs, le dernier pris en compte étant a_{-1}) : $x \triangleright ...011...1{,}1....$

D'après ce qui précède, cette séquence peut être remplacée soit par la séquence 101010…10,0 soit par la séquence 1010…100,1 suivant qu'il y a un nombre pair ou impair de « 1 » consécutifs. Dans les deux cas, l'avant dernier élément, le coefficient de φ^0, est nul.

Deuxième cas : $a_{-1} = 0$ et $a_{-2} = 0$**.** On observe dans l'écriture en or de x la séquence : $x \rhd ...1,00....$ D'après ce qui précède, cette séquence peut être remplacée par la séquence $x \rhd ...0,11....$ où le coefficient de φ^0 est nul.

Troisième cas : $a_{-1} = 0$ et $a_{-2} = 1$**.** On observe dans l'écriture en or de x la séquence : $x \rhd ...1,01.....$.
Puisque dans une écriture en or d'un réel il n'y a qu'un nombre fini de « 1 », l'alternance de 0 et 1 où les coefficients de rang impair sont nuls et ceux de rang pair sont égaux à 1 : $x \rhd ...1,01010101....$ ne peut se produire qu'un nombre fini de fois.

***** Ou bien on observe la séquence $x \rhd ...1,0101...01011....$ (l'alternance est coupée par deux « 1 » consécutifs : il existe un entier $k > 0$: $a_{-2k+1} = 0$; $a_{-2k} = a_{-2k-1} = 1$). Alors, on peut lui substituer la séquence $x \rhd ...1,0101...01100....$ où l'alternance est coupée deux rangs plus tôt : $a_{-2k+3} = 0$; $a_{-2k+2} = a_{-2k+1} = 1$. En itérant un nombre fini de fois ce genre de substitution, on parvient à couper l'alternance dès le coefficient de rang -3 : $x \rhd ...1,01100...$ puis enfin dès celui de rang -1 : $x \rhd ...1,10000...$
On est alors ramené au premier cas où l'on peut s'arranger pour que le coefficient de φ^0 soit nul.

***** Ou bien on observe la séquence $x \rhd ...1,0101...010100....$ (l'alternance est coupée par deux « 0 » consécutifs : il existe un entier $k > 0$: $a_{-2k} = 1$; $a_{-2k-1} = a_{-2k-2} = 0$). Alors, on peut lui substituer la séquence $x \rhd ...1,0101...010011....$ où l'alternance est coupée deux rangs plus tôt : $a_{2k+2} = 1$; $a_{2k+1} = a_{2k} = 0$. En itérant un nombre fini de fois ce genre de substitution, on parvient à couper l'alternance dès le coefficient de rang -2 : $x \rhd ...1,001111...$ puis enfin dès celui de rang 0 : $x \rhd ...0,11111...$ où le coefficient de φ^0 est nul.

En d'autres termes :

- Ou bien on a utilisé la relation : $\left(\sum_{i=0}^{i=k} \varphi^{-2i}\right) = \frac{1-\varphi^{-2k-2}}{1-\varphi^{-2}} = \varphi\left(1-\varphi^{-2k-2}\right) = \varphi - \varphi^{-2k-1}$ qui implique que : $\left(\sum_{i=0}^{i=k} \varphi^{-2i}\right) + \varphi^{-2k-1} = \left(\varphi - \varphi^{-2k-1}\right) + \varphi^{-2k-1} = \varphi$
- Ou bien on a utilisé la relation : $\left(\sum_{i=0}^{i=k} \varphi^{-2i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{i=2k+2} \varphi^{-i}\right)$ qui se démontre d'une manière analogue à celle de la question **2**.

Dans tous les cas de figure, on s'est toujours arrangé pour que le coefficient de φ^0 soit nul.

Ce lemme étant acquis, supposons qu'un entier naturel n ait une représentation en or. Alors, on peut s'arranger pour que dans cette représentation $a_0 = 0$.
L'entier suivant $n+1$ admet pour représentation en or la représentation identique à celle de n à l'exception du coefficient de φ^0 pour lequel on pose : $a_0 = 1$. (En appliquant le lemme, on modifiera le moment venu ce coefficient …)

La représentativité en or d'un entier est donc héréditaire. Puisque les premiers entiers naturels, à commencer par zéro, en ont une, tous les entiers naturels en ont une.

Partie B : Représentation en or pur

2.1. Soit un réel x strictement positif ayant une représentation en or pur de teneur en or égale à n. Les deux premiers coefficients de cette représentation sont : $a_n = 1$; $a_{n-1} = 0$ et on ne sait rien des coefficients suivants sinon qu'il n'y a jamais deux « 1 » consécutifs : $x \rhd 10a_{n-2}a_{n-3....}a_{n-p}$ où $a_i\, a_{i+1} = 0$ pour tout i.

Si tous les a_i autres que celui d'indice n sont nuls, alors $x = \varphi^n$.
Sinon, notons j_1 ; j_2 ;...; j_k les indices, autres que celui d'indice n, pour lesquels le coefficient a_i vaut 1.
Dans ce cas, $x = \varphi^n + \sum_{m=1}^{k} \varphi^{j_m} > \varphi^n$

D'autre part, puisqu'il n'y a jamais deux « 1 » consécutifs, pour tout sous-indice m tel que $1 \le m < k$:
$j_{m+1} \le j_m - 2$.
Ainsi : $j_1 \le n-2$; $j_2 \le j_1 - 2 \le n-4$; $j_3 \le j_2 - 2 \le n-6$ et plus généralement, par récurrence évidente, pour tout sous-indice m : $j_m \le n - 2m$.

Puisque φ est un réel strictement supérieur à 1, la suite géométrique de raison φ est une suite strictement croissante : $j_m \le n-2m \Rightarrow \varphi^{j_m} \le \varphi^{n-2m}$ pour tout sous-indice m.
Alors : $x = \varphi^n + \sum_{m=1}^{k} \varphi^{j_m} \le \varphi^n + \sum_{m=1}^{k} \varphi^{n-2m} \underset{gj}{=} \varphi^n + \varphi^n \sum_{m=1}^{k} \varphi^{-2m}$
Or : $\sum_{m=1}^{k} \varphi^{-2m} = \varphi^{-2} \dfrac{1-\varphi^{-2m-2}}{1-\varphi^{-2}} \underset{gj\,2018}{<} \dfrac{\varphi^{-2}}{1-\varphi^{-2}} = \dfrac{1}{\varphi^2 - 1} = \dfrac{1}{\varphi}$. On obtient : $x < \varphi^n + \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1}(1+\varphi) = \varphi^{n+1}$

D'où la double inégalité : $\varphi^n \le x < \varphi^{n+1}$, l'égalité $x = \varphi^n$ n'ayant lieu que si a_n est le seul coefficient non nul.

Cette double inégalité caractérise la teneur en or pur du réel non nul x. (De la sorte, si x admet une autre représentation en or pur $x \rhd 10b_{n'-2}b_{n'-3....}a_{n'-p'}$, alors elle commence par les mêmes coefficients : $n' = n$; $a_n = b_n = 1$; $a_{n-1} = b_{n-1} = 0$

2.2. Si on considère le réel $x - \varphi^n$:
Vu que $\varphi^n \le x < \varphi^{n+1}$, $0 \le x - \varphi^n < \varphi^{n+1} - \varphi^n = \varphi^{n-1}$. La teneur en or de ce réel, à supposer qu'il en ait une, est au plus $n-2$.

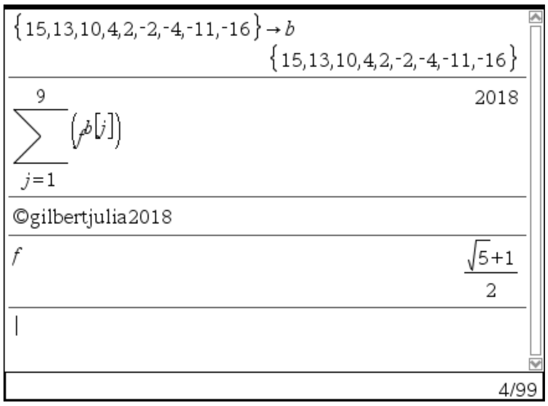
On obtient deux représentations en or de ce nombre :
$x - \varphi^n \underset{gj\,2018}{\rhd} a_{n-2}a_{n-3....}a_{n-p} \cong 10b_{n-2}b_{n-3....}b_{n-p'}$
Si ce réel $x - \varphi^n$ est non nul, au moins un des coefficients a_i est égal à 1, son suivant étant nul et de même pour les b_j. Si on note a_{n_1} (respectivement $b_{n'_1}$) les coefficients égaux à 1 de plus grand indice dans chaque représentation : $x - \varphi^n \rhd 10a_{n_1-2}a_{n_1-3....}a_{n-p} \cong 10b_{n'_1-2}b_{n'_1-3....}b_{n-p'}$ sont deux représentations en or pur de ce nombre.
D'après la caractérisation de la teneur en or, les indices sont les mêmes : $n_1 = n'_1$
Les deux représentations coïncident jusqu'au rang $n_1 - 1$ inclus : $a_k = b_k$ pour tout $k \ge n_1 - 1$

On itère le raisonnement, à propos maintenant de $x - \varphi^n - \varphi^{n_1}$.

Au bout d'un nombre fini d'itérations, on obtient nécessairement une coïncidence des deux représentations jusqu'à obtenir un réel $x-\varphi^{n}-\varphi^{n_1}-\ldots-\varphi^{n_k}$ égal à zéro (sinon, on pourrait procéder à une itération de plus).
Il s'ensuit que les deux représentations coïncident définitivement, tous les coefficients suivants étant nuls.
Une représentation en or pur, si elle existe, est unique.

3. $\varphi^{n} \le x < \varphi^{n+1} \Leftrightarrow n \le \dfrac{\ln x}{\ln\varphi} < n+1$. La teneur en or d'un réel x ayant une représentation en or pur est $E\left(\dfrac{\ln x}{\ln\varphi}\right)$.

La représentation en or pur de 2018 figure sur la capture d'écran que voici :



5. On montre assez facilement que toute puissance de φ est de la forme $\dfrac{1}{2}\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right)$ où a_n ; $b_n \in \mathbf{Z}$.

Il en est de même de toutes les sommes finies de puissances de φ, c'est-à-dire de tous les réels ayant une représentation en or.

Supposons que le réel $\dfrac{1}{6}$ ait une représentation en or. Il existe alors deux entiers relatifs tels que $\dfrac{1}{2}\left(a_n+b_n\sqrt{5}\right)=\dfrac{1}{6}$. L'entier b_n est nécessairement non nul, car l'équation $\dfrac{1}{2}a_n=\dfrac{1}{6}$ n'a pas de solution en nombres entiers.

Le réel irrationnel $\sqrt{5}$ est de ce fait un quotient de deux entiers : $\sqrt{5}=\dfrac{1-3a_n}{3b_n}$ … Conclusion absurde.

Donc, $\dfrac{1}{6}$ n'a pas de représentation en or.

Il existe au moins un réel qui n'a pas de représentation en or.