D'après le concours général 2018, problème 2 : Un si discret Monsieur Dirichlet

Cet intéressant problème a pour thème la pondération des sommets (et non des arêtes) d'un graphe connexe conformément à certaines règles de pondération. On peut imaginer que les « points jaunes » sont des points frontaliers du graphe, tandis que les « points bleus » sont des points intermédiaires. Dans quelle mesure la donnée des valeurs frontières influence-t-elle la distribution des valeurs affectées aux autres points ?

NB. Le sujet original a été quelque peu modifié.

1. Le sujet

Soit **S** un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de **S** sont reliées par des traits de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de **S** à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même.

Deux points de **S** reliés par un trait sont dits ***voisins***.

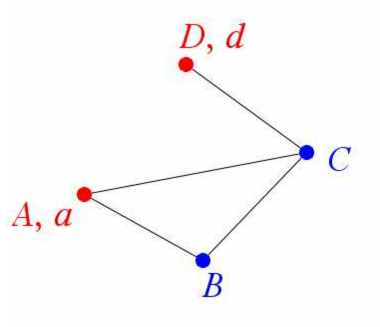
Si M est un point de **S**, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M et on note $d(M)$ le nombre, appelé ***degré*** de M, de ses voisins.

Chaque point de **S** a été colorié soit en bleu soit en jaune et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble **S**. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix.

La mathématicienne Maryam[1] voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété **(P)** suivante :

(P) : Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.

Partie A : Quelques exemples pour commencer



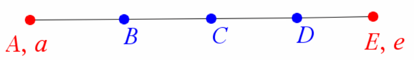
1. Dans cette question uniquement, on suppose que **S** est l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. De plus, A et D sont des points « jaunes » et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et d.

Les liaisons étant indiquées selon schéma ci-contre, quels nombres b et c Maryam doit-elle attribuer à B et à C respectivement afin de satisfaire la propriété **(P)** ?

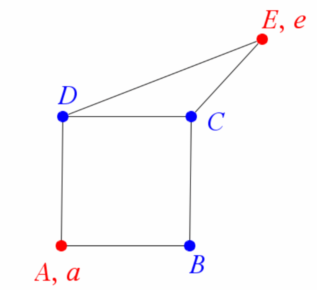
[1] Un hommage de l'auteur du sujet original à Maryam Mirzakhani de toute évidence. On ne peut que s'y associer.

2. Pour les trois questions suivantes, on suppose que **S** est l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e.

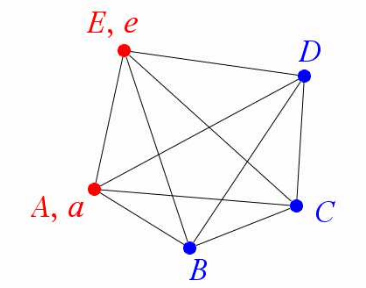
2.1. Les liaisons étant indiquées selon le schéma ci-contre, quels nombres Maryam doit-elle attribuer aux points B, C, D afin de satisfaire la propriété **(P)** ?



2.2. Même question avec le schéma ci-contre



2.3. Même question avec le schéma ci-contre



3. Dans cette question uniquement, on généralise le schéma de la question **2.3** avec un nombre quelconque de points. On suppose que n est un entier strictement positif, que **S** est l'ensemble $\{P_0, P_1, ..., P_n, P_{n+1}\}$, que tout point de **S** est relié à chaque autre point de **S**. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes et Gustav leur a attribué respectivement les valeurs a et b. Quels nombres Maryam doit-elle attribuer à chacun des points $P_1, ..., P_n$ afin de satisfaire la propriété **(P)** ?

Partie B : Étude du cas général

On note respectivement **J** l'ensemble des points jaunes et **B** l'ensemble des points bleus. Ainsi $\mathbf{S} = \mathbf{J} \cup \mathbf{B}$. Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela revient à définir une fonction k de **J** vers $\mathbb{R}$. L'objectif de Maryam est de construire une fonction f de **S** vers $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(M) = k(M)$ si M est jaune (*condition 1*)
- $f(M) = \dfrac{f(V_1) + ... + f(V_d)}{d}$ si M est bleu (*condition 2*) où $d = d(M)$ est le degré de M (qui dépend de M) et où $V_1, ..., V_d$ sont les voisins de M.

On dira alors que f est ***une solution pour l'attribution*** k.

Dans cette partie, on suppose donnée une telle attribution. L'ensemble $\{k(M),\ M \in \mathbf{J}\}$, en tant qu'ensemble fini, possède un plus grand élément et un plus petit élément. On note K le plus grand des nombres $k(M)$, et κ le plus petit des nombres $k(M)$, lorsque M décrit l'ensemble **J**.

1. Existence d'une solution

On construit par récurrence la suite (f_n) de fonctions suivantes :
On pose :

- $f_0(M)=k(M)$ si M est jaune et $f_0(M)=\kappa$ si M est bleu où κ est le plus petit des nombres $k(M)$, lorsque M décrit l'ensemble **J**, comme précisé ci-dessus.

Puis, pour tout entier n on pose :

- $f_{n+1}(M)=k(M)$ si M est jaune et $f_{n+1}(M)=\dfrac{f_n(V_1)+...+f_n(V_d)}{d}$ si M est bleu, où $d=d(M)$ est le degré de M (qui dépend de M) et où $V_1,...,V_d$ sont les voisins de M.

1.1. Justifier que $\kappa \leq f_0(M) \leq f_1(M) \leq K$ pour tout point de *S*.

1.2. Prouver que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout point M de **S** : $\kappa \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$

1.3. En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution *k*.

2. Que peut-on dire de la solution ainsi obtenue si tous les points de **J** sont pondérés par le même nombre réel ?

3. On suppose que f est une solution pour l'attribution k_1 et que g est une solution pour l'attribution k_2. Montrer que $f-g$ est une solution pour l'attribution k_1-k_2.

4. Unicité de la solution

4.1. On suppose que pour tout point M de **J** : $k(M)=0$ c'est-à-dire que l'on considère l'attribution nulle.
Montrer que l'unique solution pour l'attribution nulle est telle que $f(M)=0$ pour tout point M de **S**.

4.2. En déduire que, pour une attribution k donnée, il existe une seule solution.

2. Quelques conjectures pour le « cas général »

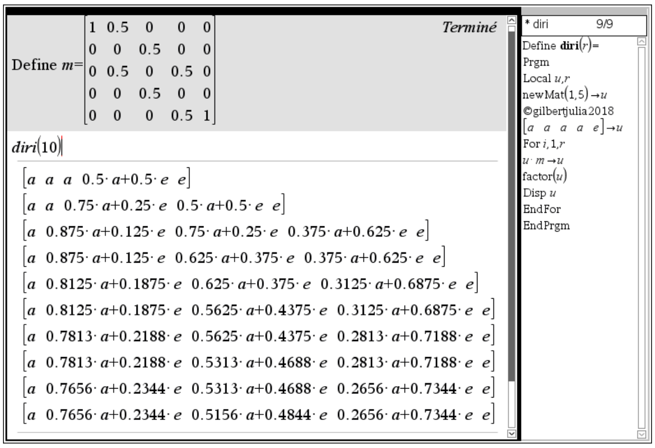
Dans le « cas général », il peut être curieux d'examiner comment se construisent les premières fonctions f_n sur les « quelques exemples pour commencer » de la partie **A.2** du problème qui portent sur des graphes à cinq sommets.

On suppose que $a \leq e$, ce qui ne change pas la généralité. f_0 attribue ainsi à tous les points bleus le réel a, plus petit des deux réels a et e.

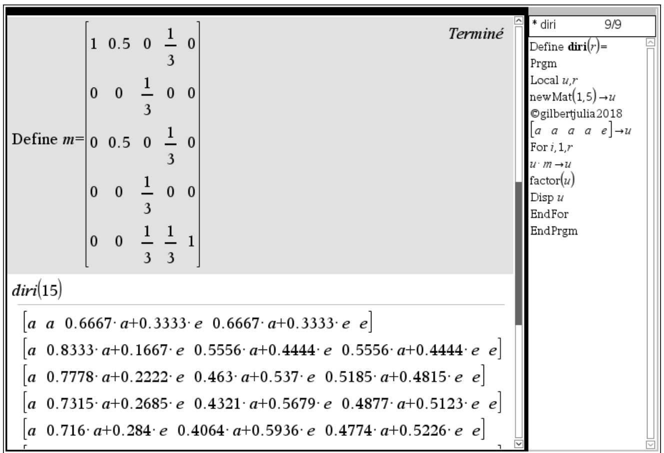
.

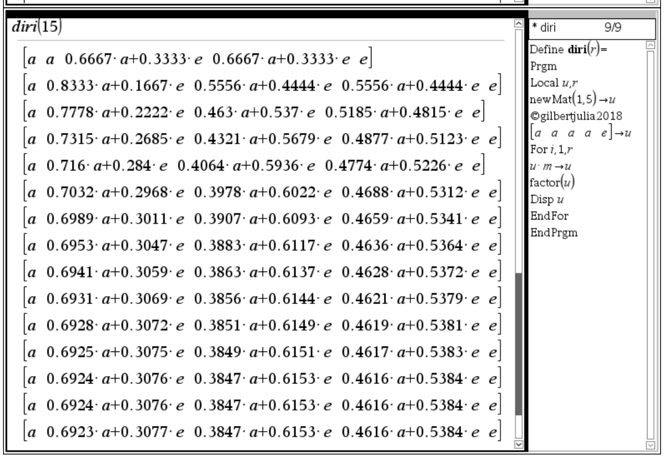
C'est l'objet du programme **diri** ci-contre.
La fonction f_0 figure dans le programme lui-même sous forme de la matrice ligne $\begin{bmatrix} a & a & a & a & e \end{bmatrix}$.
La matrice **m**, que l'on définit séparément, applique les relations ${}_{gj}$ de récurrence.
Le programme renvoie, sous forme de matrices lignes, les pondérations des 5 sommets par les premières fonctions f_n.

Ci-contre, c'est l'exemple de question **2.1** qui est testé pour $r = 10$ itérations.



Voici maintenant l'exemple **2.2.** avec 15 itérations.





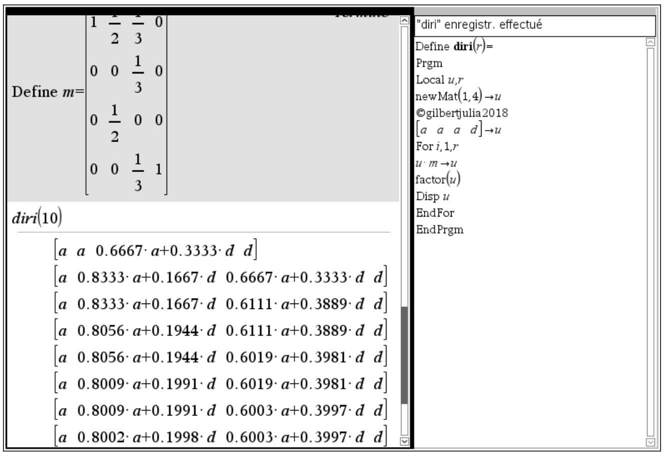
Dans un cas ${}_{gj}$ comme dans l'autre :

Pour un même point bleu, la somme des coefficients de a et de e semble être égale à 1 ; la suite des coefficients de a semble être croissante etcelle des coefficients de e semble être décroissante. Il s'ensuit que si $a \leq e$, c'est-à-dire si a est le plus petit élément, les suites $\left(f_n(M)\right)$ semblent être croissantes.

On retrouve le même comportement si l'on s'intéresse au tout premier exemple du **A.1.**

De plus, on peut avoir une certaine idée des limites présumées pour les suites que l'on est en train de $_{gj}$ construire.

Reste à démontrer ces conjectures.



3. Quelques pistes de résolution

Partie A : Quelques exemples pour commencer

1. Si b et c sont les nombres attribués à B et à C et D : il s'agit de résoudre un système de deux équations aux deux inconnues b et c et de paramètres a et d. :

2.1, 2 et 3. Si b, c, d sont les nombres attribués à B, C et D : il s'agit dans chaque cas de résoudre un système de trois équations indépendantes aux trois inconnues b, c, d et de paramètres a et e.

3. il y a $n+2$ points dont 2 jaunes et n bleus. Chacun des n points à pondérer admet $n+1$ voisins : .
On obtient un système de n équations à n inconnues : $(n+1)p_i - \sum_{j\neq i} p_j =_{gjulia} a+b$ avec $i=1,\dots,n$

Partie B : « Cas général »

1. Lorsque M appartient à **J**, la suite $(f_n(M))$ est une suite constante. Pour un tel point de **J**, la constante en question est entre κ et K. La question qui se pose est : que se passe-t-il pour une suite $(f_n(M))$ lorsque M appartient à **B** ?

De façon générale, pour tout point M bleu : $f_{n+1}(M) =_{gj2018} \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{i=d} f_n(V_i) = \frac{1}{d}\left(\sum_{V_i\in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum_{V_i\in \mathbf{B}} f_n(V_i)\right)$ en effectuant une partition de l'ensemble des voisins de M : « l'ensemble des voisins jaunes » dont on notera $j(M)$ le cardinal et « l'ensemble des voisins bleus » dont on notera $b(M)$ le cardinal.
On remarque que $j(M)+b(M)=d(M)$ par conséquent.

La question **1.1** initialise la triple inégalité à démontrer, à savoir que pour tout entier n : $\kappa \le f_n(M) \le f_{n+1}(M) \le K$ $_{gilbertjulia2018}$ pour tout point M bleu. Il reste à démontrer son hérédité pour clore la démonstration.
Supposer que, pour un certain entier $n \ge 1$: $\kappa \le f_{n-1}(M) \le f_n(M) \le K$ pour tout point M de **B**. Voir où se situe $f_{n+1}(M)$ par rapport à ces nombres.

1.3. Pour tout point de **B**, la suite $(f_n(M))$ est une suite croissante et majorée …

Unicité de la solution.

4. On suppose que Gustav a affecté le réel zéro à tous les points jaunes. Dans ce cas, la fonction : $f(M)=0$ pour tout point M de **S** est une solution évidente pour cette attribution.

Supposer qu'il existe une autre solution g, non nulle, pour cette attribution. C'est-à-dire que $g(M)=0$ pour tout point jaune mais qu'il existe au moins un point M (nécessairement bleu) tel que $g(M)\neq 0$. On peut supposer, sans diminuer la généralité, que $g(M)>0$. L'ensemble $\{g(M)\ ; M\in \mathbf{B}\ ;\ g(M)>0\}$ étant non vide, il possède un plus grand élément G.

Soit E_G l'ensemble, non vide par hypothèse, des points M de **B** tel que : $g(M)=G$. Montrer que tout élément de E_G ne peut avoir comme voisins que d'autres points de E_G. En déduire une contradiction avec le fait que de tout point de **S**, en particulier de tout point de E_G, on peut rejoindre tout autre point de **S**, y compris ceux qui n'appartiennent pas à E_G (il y en a, ne serait-ce que ceux de **J** mais aussi éventuellement d'autres points de **B** de coefficients qui seraient strictement inférieurs à G).

5. Si f et g sont deux solutions pour une même attribution k, $f-g$ est solution pour l'attribution nulle.