D'après le concours général 2018, problème 2 : Un si discret Monsieur Dirichlet

Cet intéressant problème a pour thème la pondération des sommets (et non des arêtes) d'un graphe connexe conformément à certaines règles de pondération. On peut imaginer que les « points jaunes » sont des points frontaliers du graphe, tandis que les « points bleus » sont des points intermédiaires. Dans quelle mesure la donnée des valeurs frontières influence-t-elle la distribution des valeurs affectées aux autres points ?

NB. Le sujet original a été quelque peu modifié.

1. Le sujet

Soit **S** un ensemble fini non vide de points du plan. Certaines paires de points de **S** sont reliées par des traits de sorte qu'en suivant ces traits, éventuellement en plusieurs étapes, il est toujours possible de passer d'un point de **S** à n'importe quel autre (les intersections éventuelles entre les traits ne sont pas considérées et un point n'est jamais relié à lui-même.

Deux points de **S** reliés par un trait sont dits ***voisins***.

Si M est un point de **S**, on note $V(M)$ l'ensemble des voisins de M et on note $d(M)$ le nombre, appelé ***degré*** de M, de ses voisins.

Chaque point de **S** a été colorié soit en bleu soit en jaune et il y a au moins un point jaune dans l'ensemble **S**. À chaque point jaune, Gustav a attribué un nombre réel de son choix.

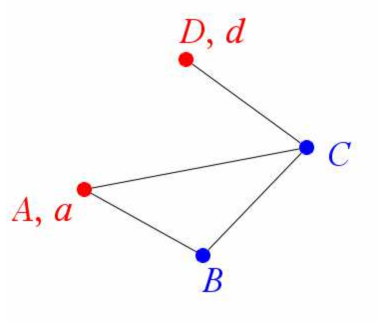
La mathématicienne Maryam voudrait alors attribuer un réel à chaque point bleu (pas forcément le même nombre d'un point bleu à l'autre) de façon à satisfaire la propriété **(P)** suivante :

(P) : Le nombre attribué à tout point bleu est la moyenne des nombres attribués à ses voisins.

Partie A : Quelques exemples pour commencer

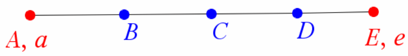
1. Dans cette question uniquement, on suppose que **S** est l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. De plus, A et D sont des points « jaunes » et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et d.

Les liaisons étant indiquées selon schéma ci-contre, quels nombres b et c Maryam doit-elle attribuer à B et à C respectivement afin de satisfaire la propriété **(P)** ?

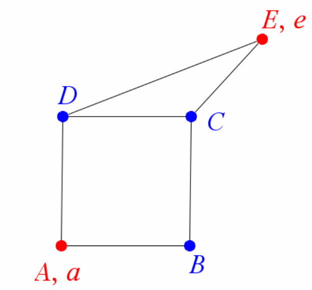


2. Pour les trois questions suivantes, on suppose que **S** est l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$. Les points A et E sont les seuls points jaunes et Gustav leur a attribué respectivement les réels a et e.

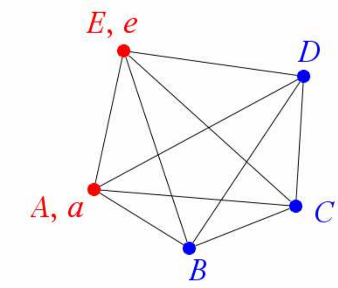
2.1. Les liaisons étant indiquées selon le schéma ci-contre, quels nombres Maryam doit-elle attribuer aux points B, C, D afin de satisfaire la propriété **(P)** ?



2.2. Même question avec le schéma ci-contre



2.3. Même question avec le schéma ci-contre



3. Dans cette question uniquement, on généralise le schéma de la question **2.3** avec un nombre quelconque de points. On suppose que n est un entier strictement positif, que **S** est l'ensemble $\{P_0, P_1, ..., P_n, P_{n+1}\}$, que tout point de **S** est relié à chaque autre point de **S**. De plus, P_0 et P_{n+1} sont les seuls points jaunes et Gustav leur a attribué respectivement les valeurs a et b. Quels nombres Maryam doit-elle attribuer à chacun des points $P_1, ..., P_n$ afin de satisfaire la propriété **(P)** ?

Partie B : Étude du cas général

On note respectivement **J** l'ensemble des points jaunes et **B** l'ensemble des points bleus. Ainsi $\mathbf{S} = \mathbf{J} \cup \mathbf{B}$. Quand Gustav attribue un réel à chaque point jaune, cela revient à définir une fonction k de **J** vers $\mathbb{R}$. L'objectif de Maryam est de construire une fonction f de **S** vers $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(M) = k(M)$ si M est jaune (*condition 1*)
- $f(M) = \dfrac{f(V_1) + ... + f(V_d)}{d}$ si M est bleu (*condition 2*) où $d = d(M)$ est le degré de M (qui dépend de M) et où $V_1, ..., V_d$ sont les voisins de M.

On dira alors que f est ***une solution pour l'attribution*** k.

Dans cette partie, on suppose donnée une telle attribution. L'ensemble $\{k(M),\ M \in \mathbf{J}\}$, en tant qu'ensemble fini, possède un plus grand élément et un plus petit élément. On note K le plus grand des nombres $k(M)$, et κ le plus petit des nombres $k(M)$, lorsque M décrit l'ensemble **J**.

1. Existence d'une solution

On construit par récurrence la suite (f_n) de fonctions suivantes :
On pose :

- $f_0(M)=k(M)$ si M est jaune et $f_0(M)=\kappa$ si M est bleu où κ est le plus petit des nombres $k(M)$, lorsque M décrit l'ensemble **J**, comme précisé ci-dessus.

Puis, pour tout entier n on pose :

- $f_{n+1}(M)=k(M)$ si M est jaune et $f_{n+1}(M)=\dfrac{f_n(V_1)+...+f_n(V_d)}{d}$ si M est bleu, où $d=d(M)$ est le degré de M (qui dépend de M) et où $V_1,...,V_d$ sont les voisins de M.

1.1. Justifier que $\kappa \leq f_0(M) \leq f_1(M) \leq K$ pour tout point de S.

1.2. Prouver que pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout point M de **S** : $\kappa \leq f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$

1.3. En déduire l'existence d'une solution pour l'attribution k.

2. Que peut-on dire de la solution ainsi obtenue si tous les points de **J** sont pondérés par le même nombre réel ?

3. On suppose que f est une solution pour l'attribution k_1 et que g est une solution pour l'attribution k_2. Montrer que $f-g$ est une solution pour l'attribution k_1-k_2.

4. Unicité de la solution

4.1. On suppose que pour tout point M de **J** : $k(M)=0$ c'est-à-dire que l'on considère l'attribution nulle.
Montrer que l'unique solution pour l'attribution nulle est telle que $f(M)=0$ pour tout point M de **S**.

4.2. En déduire que, pour une attribution k donnée, il existe une seule solution.

2. Eléments de correction

Partie A : Quelques exemples pour commencer

1. Si b et c sont les nombres attribués aux points B et C : $\begin{cases} b = \dfrac{a+c}{2} \\ c = \dfrac{a+b+d}{3} \end{cases}$.

On obtient un système de deux équations aux deux inconnues b et c et de paramètres a et d :

$\begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 3c = a + d \end{cases}$ et de solution $\begin{cases} b = \dfrac{4a+d}{5} \\ c = \dfrac{3a+2d}{5} \end{cases}$

2.1. Si b, c, d sont les nombres attribués à B, C et D : $\begin{cases} b = \dfrac{a+c}{2} \\ c = \dfrac{b+d}{2} \\ d = \dfrac{c+e}{2} \end{cases}$.

On obtient un système de trois équations indépendantes aux trois inconnues b, c, d et de paramètres a et e et de solution : $b = \dfrac{3a+e}{4}$; $c = \dfrac{a+e}{2}$; $d = \dfrac{a+3e}{4}$.

2.2. Dans ce cas : $\begin{cases} b = \dfrac{a+c}{2} \\ c = \dfrac{b+d+e}{3} \\ d = \dfrac{a+c+e}{3} \end{cases}$. Solution : $b = \dfrac{9a+4e}{13}$; $c = \dfrac{5a+8e}{13}$; $d = \dfrac{6a+7e}{13}$.

2.3. Dans ce cas : $\begin{cases} b = \dfrac{a+c+d+e}{4} \\ c = \dfrac{b+d+e+a}{4} \\ d = \dfrac{c+e+a+b}{4} \end{cases}$. Solution : $b = c = d = \dfrac{a+e}{2}$.

3. il y a $n+2$ points dont 2 jaunes et n bleus. En notant p_i le nombre attribué au point P_i :

Chacun des n points à pondérer admet $n+1$ voisins : $_{gjulia}\begin{cases} p_1 = \dfrac{a+p_2+...+p_n+b}{n+1} \\ p_2 = \dfrac{a+p_1+p_3+...+p_n+b}{n+1} \\ ... \\ p_n = \dfrac{a+p_1+...+p_{n-1}+b}{n+1} \end{cases}$.

On obtient un système de n équations à n inconnues : $(n+1)p_i - \sum\limits_{j \neq i} p_j = a+b$ avec $i = 1,...,n$

En retranchant membre à membre deux des équations, celle de rang j à celle de rang i : $(n+2)(p_i - p_j) = 0$ et donc $p_i = p_j$ quels que soient les indices i et j.

Les pondérations doivent être les mêmes pour tous les points, toutes égales à $\dfrac{a+b}{2}$.

Partie B : « Cas général »

1. Dans le cas général, κ étant le plus petit de tous les réels $k(M)$:

- Lorsque M appartient à **J**, $f_n(M) = k(M)$ pour tout entier naturel n.
- Lorsque M appartient à **B**, on pose $f_0(M) = \kappa$ puis par récurrence pour tout entier naturel n on pose $f_{n+1}(M) = \dfrac{f_n(V_1)+...+f_n(V_d)}{d}$, où $d = d(M)$ est le degré de M (qui dépend de M) et où $V_1,...,V_d$ sont les voisins de M.

Lorsque M appartient à **J**, la suite $(f_n(M))$ est une suite constante. Pour un tel point, cette constante $k(M)$ est comprise entre κ et K par définition de ces nombres. On se le tient pour dit une fois pour toutes.

Désormais, que se passe-t-il pour une suite $(f_n(M))$ lorsque M appartient à **B** ?

De façon générale, pour tout point M bleu : on va effectuer une partition de l'ensemble des voisins de M : « l'ensemble des voisins jaunes » dont on notera $j(M)$ le cardinal et « l'ensemble des voisins bleus » dont on notera $b(M)$ le cardinal. On remarque au passage que $j(M) + b(M) = d(M)$.
Pour tout entier n de **N*** : les voisins V_i jaunes de M ont pour pondération $k(V_i)$, toujours la même pour chaque point jaune, et les voisins V_i bleus de M ont pour pondération, au rang n, $f_n(V_i)$.

Au rang suivant : $f_{n+1}(M) \underset{gj\,2018}{=} \dfrac{1}{d}\sum\limits_{i=1}^{i=d} f_n(V_i) = \dfrac{1}{d}\left(\sum\limits_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum\limits_{V_i \in \mathbf{B}} f_n(V_i)\right)$

1.1. Pour tout point M bleu : $f_1(M) \underset{gj\,2018}{=} \dfrac{1}{d}\sum\limits_{i=1}^{i=d} f_0(V_i) = \dfrac{1}{d}\left(\sum\limits_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum\limits_{V_i \in \mathbf{B}} \kappa\right) = \dfrac{1}{d}\left(\sum\limits_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \kappa b(M)\right)$

Puisque $\kappa \leq k(V_i) \leq K$ pour tout voisin jaune V_i de M :

$$\frac{1}{d(M)}(\kappa\, j(M) + \kappa b(M)) \leq f_1(M) \underset{gj}{\leq} \frac{1}{d(M)}(K\, j(M) + \kappa b(M)) \leq \frac{1}{d(M)}(K\, j(M) + K\, b(M)).$$

On obtient : $\kappa = f_0(M) \leq f_1(M) \underset{gj}{\leq} K$ pour tout point M bleu.

1.2. La question **1.1** a initialisé au rang zéro la triple inégalité à démontrer pour tout entier n. Il reste à établir son hérédité pour clore la démonstration.

Supposons que, pour un certain entier $n \geq 1$: $\kappa \leq f_{n-1}(M) \leq f_n(M) \leq K$ pour tout point M de **B**.
L'important est de « positionner » $f_{n+1}(M)$, et de montrer qu'il s'intercale entre $f_n(M)$ et K.

Soit M un point quelconque de **B**. On a vu que : $f_{n+1}(M) \underset{gj\,2018}{=} \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{i=1}^{i=d} f_n(V_i) = \dfrac{1}{d}\left(\sum_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum_{V_i \in \mathbf{B}} f_n(V_i)\right)$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $f_{n-1}(V_i) \leq f_n(V_i) \leq K$ pour tous les voisins bleu V_i de M.
En conséquence, $\displaystyle\sum_{V_i \in \mathbf{B}} f_{n-1}(V_i) \leq \sum_{V_i \in \mathbf{B}} f_n(V_i) \leq K\, b(M)$ puis :

$$\frac{1}{d}\left(\sum_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum_{V_i \in \mathbf{B}} f_{n-1}(V_i)\right) \underset{gj}{\leq} \frac{1}{d}\left(\sum_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum_{V_i \in \mathbf{B}} f_n(V_i)\right) \underset{gj}{\leq} \frac{1}{d}\left(\left(\sum_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i)\right) + K\, b(M)\right) \leq \frac{1}{d}\left(K\ j(M) + K\, b(M)\right)$$

C'est-à-dire $f_n(M) \leq f_{n+1}(M) \leq K$, ceci étant établi pour n'importe quel point M bleu.

La triple inégalité : « $\kappa \leq f_{n-1}(M) \leq f_n(M) \leq K$ pour tout point M bleu » est héréditaire.
Elle est donc vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

1.3. Pour tout point M de **B**, la suite $\left(f_n(M)\right)$ est une suite croissante et majorée. Elle converge vers une limite finie $l(M)$ qui vérifie l'inégalité : $\kappa \leq l(M) \leq K$.

Si on pondère chaque point de **B** par $l(M)$, par passage à la limite dans la relation de récurrence constructrice de ces suites : $l(M) \underset{gj\,2018}{=} \dfrac{1}{d}\left(\displaystyle\sum_{V_i \in \mathbf{J}} k(V_i) + \sum_{V_i \in \mathbf{B}} l(M)\right)$ et le nombre $l(M)$ est la moyenne de ses voisins.

La fonction qui coïncide avec k sur **J** et avec l sur **B** est une solution pour l'attribution k.

2. Si tous les points de **J** sont pondérés par un même nombre réel a, alors $\kappa = K = a$. Toutes les fonctions f_n sont des fonctions constantes, la solution $f(M) = a$ pour tout point M de **S** est une solution évidente. En particulier, on obtient cette solution dans le cas où il n'y a qu'un seul point jaune.

3. Soient deux attributions k_1 et k_2 (pour une même configuration bien entendu) et f et g une solution pour chacune de ces attributions.

Pour tout point M jaune $f(M) = k_1(M)$ et $g(M) = k_2(M)$. En conséquence :
$(f-g)(M) = f(M) - g(M) = k_1(M) - k_2(M) = (k_1 - k_2)(M)$ (*condition 1 vérifiée pour l'attribution* $k_1 - k_2$)

Pour tout point M bleu : $f(M) = \dfrac{f(V_1) + \ldots + f(V_d)}{d}$ et $g(M) = \dfrac{g(V_1) + \ldots + g(V_d)}{d}$.

$$(f-g)(M) = f(M) - g(M) = \left(\frac{f(V_1) + \ldots + g(V_d)}{d}\right) - \left(\frac{g(V_1) + \ldots + g(V_d)}{d}\right) = \frac{\left(f(V_1) - g(V_1)\right) + \ldots + \left(f(V_d) - g(V_d)\right)}{d}$$

On obtient : $(f-g)(M) \underset{gjulia2018}{=} \dfrac{(f-g)(V_1)+\ldots+(f-g)(V_d)}{d}$ (*condition 2 vérifiée*).
La fonction $f-g$ est une solution pour l'attribution k_1-k_2.

Unicité de la solution.

4. On suppose que Gustav a affecté le réel zéro à tous les points jaunes. Dans ce cas, la fonction : $f(M)=0$ pour tout point *M* de **S** est une solution évidente pour cette attribution.

Supposons qu'il existe une autre solution *g*, non nulle, pour cette attribution. C'est-à-dire que $g(M)=0$ pour tout point jaune mais qu'il existe au moins un point *M* (nécessairement bleu) tel que $g(M)\neq 0$. On peut supposer, sans diminuer la généralité, que $g(M)>0$. L'ensemble $\{g(M)\ ; M\in \mathbf{B}\ ;\ g(M)>0\}$ étant fini et non vide, il possède un plus grand élément *G*.

Soit E_G l'ensemble, non vide, des points *M* de **B** tel que : $g(M)=G$. Quel que soit le point *M* de E_G, $G=g(M)$ étant à la fois valeur maximale de *g* et moyenne de l'image par *g* des voisins de *M*, ce point *M* ne peut pas avoir un voisin *V* tel que $g(V)<G$ (sinon la moyenne de ses voisins serait $\leq \dfrac{(d-1)G+g(V)}{d}<G$).
Ses seuls voisins possibles sont des points qui appartiennent eux-mêmes à E_G.

Or, E_G est strictement contenu dans **S** (il y a dans **S** au moins un point jaune et ce point au moins n'appartient pas à E_G).

Ceci crée une contradiction avec le fait que l'ensemble des points **S** est un ensemble connexe : il y a au moins un point M_0 de E_G qui admet pour voisin un point *V* n'appartenant pas à E_G donc tel que $g(V)<G$ et s'il en est ainsi, la moyenne des voisins de ce point M_0 ne peut plus être égale à *G*.

Il n'existe pas d'autre solution que la fonction nulle pour l'attribution nulle.

5. Si *f* et *g* sont deux solutions pour une même attribution *k*, $f-g$ est solution pour l'attribution nulle. Il s'agit nécessairement de la fonction nulle : $f=g$.
Il y a une et une seule solution pour une attribution *k* donnée.