D'après concours général ES et L 2018 problème 2

NB. Le texte original a été ici un peu modifié.

1. Le sujet

L'objectif de ce problème est d'étudier, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n = x^{n-1} + ... + x + 1$ où l'inconnue x est un nombre réel.

1. Soit P_2 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par $P_2(x) = x^2 - x - 1$
Résoudre l'équation $P_2(x) = 0$. Montrer que l'une des solutions est strictement inférieure à 0 et que l'autre solution est strictement supérieure à 1.

2. Soit P_3 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par $P_3(x) = x^3 - x^2 - x - 1$
2.1. En étudiant les variations de P_3, montrer que l'équation $P_3(x) = 0$ admet une unique solution réelle, que l'on notera a_3 et qu'on ne cherchera pas à calculer. Montrer que $a_3 > 1$
2.2. Écrire un algorithme qui donne une valeur approchée de a_3 à 10^{-3} près.

3. Soit P_4 la fonction polynôme définie, pour tout réel x, par $P_4(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$
Montrer que l'équation $P_4(x) = 0$ admet deux solutions a_4 et b_2 telles que $b_2 < 0 < 1 < a_4$.
On ne cherchera à calculer ni a_4 ni b_2.

On se place maintenant dans le cas général.
On désignera désormais par n un entier supérieur ou égal à 2.
On note P_n la fonction polynôme définie, pour tout nombre réel x, par :
$P_n(x) = x^n - x^{n-1} - ... - x - 1 = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ et on pose, pour tout nombre réel x, $Q_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$
4.1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $P_n(x) = 0$ implique $Q_n(x) = 0$
4.2. L'implication réciproque est-elle vraie ?

5.1. Donner le tableau des variations de Q_n sur $[0\,; +\infty[$. Préciser les valeurs de $Q_n(1)$ et $Q_n(2)$. En déduire que, dans l'intervalle $[1\,; 2]$, l'équation $Q_n(x) = 0$ possède une unique solution . On note a_n cette solution, qu'on ne cherchera pas à calculer.
5.2. Montrer que a_n est l'unique solution positive ou nulle de l'équation $P_n(x) = 0$

6. Montrer que la suite (a_n) est convergente et donner sa limite.

Dans les questions suivantes, on suppose que n est un entier naturel pair supérieur ou égal à 2.
On note k l'entier tel que $n = 2k$.

7.1. Montrer que Q_{2k} est strictement croissante sur $]-\infty\,; 0]$
7.2. Préciser $Q_{2k}(-1)$

7.3. Montrer que l'équation $P_{2k}(x)=0$ admet une unique solution appartenant à $]-1\,;0[$.
On note b_k cette solution.
7.4. Combien l'équation $P_{2k}(x)=0$ a-t-elle de solutions dans **R** ?

8.1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]-1\,;0[$: $Q_{2k+2}(x)\geq Q_{2k}(x)$
8.2. En déduire le signe de $Q_{2k+2}(b_k)$
8.3. Montrer que la suite (b_k) est convergente. On note l sa limite.

9.1. Pour tout entier strictement positif k, déterminer le signe de $Q_{2k}(l)$.
9.2. Soit $x\in\,]-1\,;0[$. Que peut-on dire de $Q_{2k}(x)$ quand k tend vers l'infini ?
En déduire que $l=-1$

10. Montrer que la suite $\left({b_k}^{2k}\right)$ converge vers une limite qu'on déterminera

2. Eléments de correction

1. On reconnaît l'équation au second degré dont le nombre d'or et l'opposé de son inverse sont les solutions.

NB. Les fonctions dont il est question dans la suite du problème sont, en tant que fonctions polynômes, des fonctions continues sur ***R****.*

L'image d'un intervalle I par une fonction f continue est un intervalle et, lorsque f est strictement monotone sur l'intervalle I, sa restriction à l'intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle image $f(I)$ *: pour tout réel y appartenant à* $f(I)$*, il existe un et un seul réel x appartenant à I tel que* $f(x)=y$*.*
En particulier, si 0 est un élément de $f(I)$*, alors il existe un et un seul réel x appartenant à I tel que* $f(x)=0$*.*

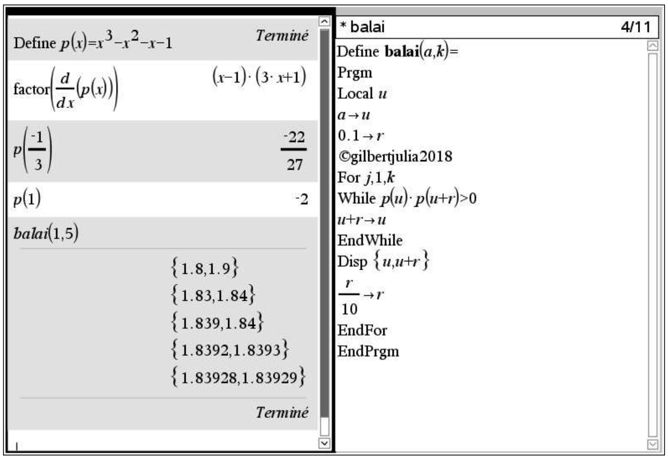
Cette situation se répètera plusieurs fois dans les questions à suivre.

2. Une étude du signe de sa dérivée puis des variations de la fonction dérivable P_3 fait apparaître que sa restriction à l'intervalle $]-\infty\,;1]$ admet un maximum négatif en $-\dfrac{1}{3}$ et donc y est strictement négative (l'équation $P_3(x)=0$ n'a pas de solution dans cet intervalle).

P_3 est par ailleurs strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. L'image de cet intervalle est $[-2\,;+\infty[$. En effet, $P_3(1)=-2$ et :

$$\lim_{x\to+\infty} P_3(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

La restriction de P_3 à $[1\,;+\infty[$ réalise une bijection de cet intervalle sur $[-2\,;+\infty[$, intervalle contenant 0.
En particulier, la fonction P_3 prend sur $[1\,;+\infty[$ une fois et une seule la valeur zéro.
L'équation $P_3(x)=0$ a une solution unique a_3 dans $[1\,;+\infty[$, que l'on peut localiser entre 1 et 2.

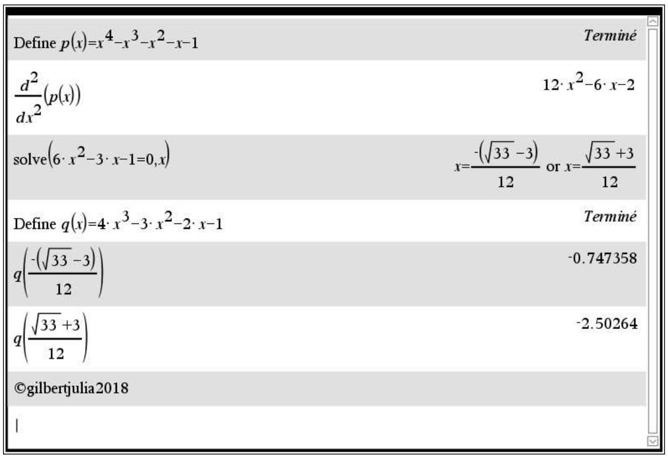


Un programme de balayage localise cette solution dans $[1{,}839\,;1{,}84]$

3. P_4 est une fonction deux fois continûment dérivable. La dérivée seconde de P_4 est la fonction

$$P''_4(x)=12x^2-6x-2=2\left(x-\frac{3-\sqrt{33}}{12}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{33}}{12}\right)$$

Sa dérivée première est la fonction $P'_4(x)=4x^3-3x^2-2x-1$.



Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\frac{3+\sqrt{33}}{12}\right]$, cette fonction admet un maximum au point $\frac{3-\sqrt{33}}{12}$; la calculatrice montre que ce maximum est strictement négatif ($-0{,}7$ à 10^{-1} près), la fonction P'_4 est strictement négative sur $\left]-\infty\,;\,\frac{3+\sqrt{33}}{12}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{3-\sqrt{33}}{12}\,;+\infty\right[$, cette fonction est strictement croissante ; $P'_4\left(\frac{3-\sqrt{33}}{12}\right)_{gj}$ est strictement négatif tandis que $P'_4(2)=15$ est strictement positif.

Elle change de signe, une fois et une seule sur $\left[\frac{3-\sqrt{33}}{12}\,;+\infty\right[$, en un réel β dont un balayage montre que $1{,}28\le\beta\le1{,}29$. Elle est strictement négative sur $]-\infty\,;\,\beta[$ et strictement positive sur $]\beta\,;+\infty[$.

La fonction P_4 est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta\,;+\infty[$

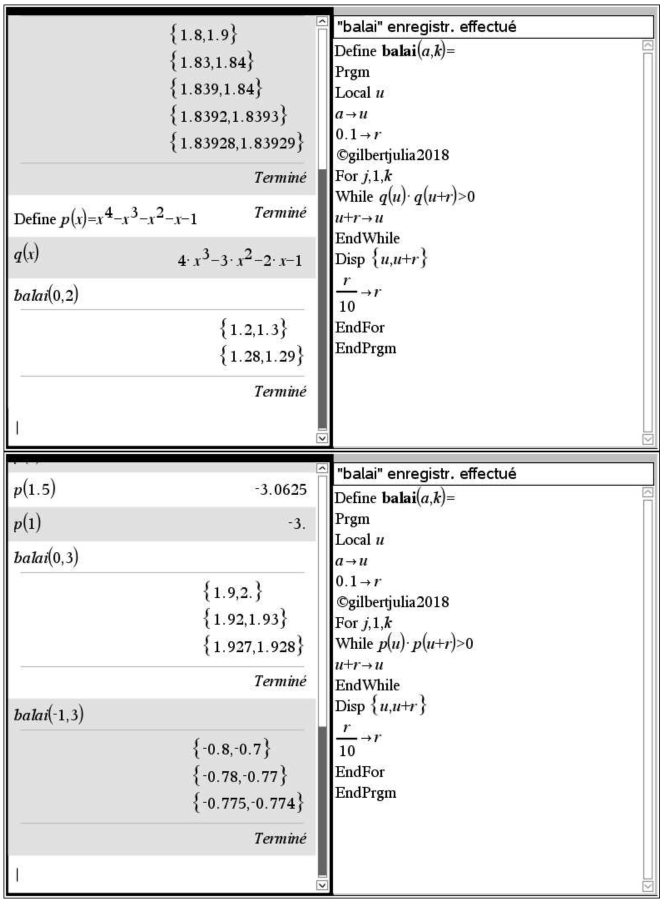
Ses limites aux bornes infinies étant $+\infty$, comme le terme de plus haut degré x^4,

$P_4(]-\infty\,;\,\beta])=P_4([\beta\,;+\infty[)=[P_4(\beta)\,;+\infty[$.

Du fait que $P_4(\beta)<P_4(1)\underset{gj}{=}-3$, on déduit que $P_4(\beta)<0$ et que 0 est deux fois valeur intermédiaire. L'équation $P_4(x)=0$ admet deux solutions, telles que $b_2<\beta<a_4$.

Les calculs de : $P_4(-1)=1$; $P_4(0)=-1$ $P_4(2)=15$ permettent une meilleure localisation :
$-1<b_2<0<1<\beta<a_4<2$.

Deux balayages montreraient que :
$-0{,}775<b_2<-0{,}774<1{,}927<a_4<1{,}928$.



4. Soit *n* un entier supérieur ou égal à 2.

Quel que soit le réel *x* ($x\neq1$ ou non) : $x^n-1=(x-1)\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)$ et on en déduit une factorisation de $Q_n(x)$: $x^{n+1}-2x^n+1=(x-1)x^n-\left(x^n-1\right)=(x-1)\left(x^n-\left(1+x+\ldots+x^{n-1}\right)\right)$ c'est-à-dire $(x-1)P_n(x)=Q_n(x)$.

Dès lors : $P_n(x)=0\Rightarrow Q_n(x)=0$ puisque $P_n(x)$ est un facteur dans $Q_n(x)$.

Réciproquement : $Q_n(x)=0 \underset{gilbertjulia\,2018}{\Rightarrow} \begin{cases} P_n(x)=0 \\ ou\ bien \\ x-1=0 \end{cases}$. L'implication réciproque est fausse.

5. La mise en facteur : $Q_n(x)=x^{n+1}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ justifie que les limites aux bornes infinies de Q_n sont les mêmes que celles de la fonction $x \mapsto x^{n+1}$

La fonction polynôme Q_n est une fonction dérivable et : $Q'_n(x)=(n+1)x^n-2n\,x^{n-1}=(n+1)x^{n-1}\left(x-\frac{2n}{n+1}\right)$

L'entier n étant supérieur ou égal à 2, la puissance $(n-1)^{ème}$ de x est au moins la puissance 1 :

$Q_n'(x)=0 \underset{gilbertjulia\,2018}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ ou\ bien \\ x=\frac{2n}{n+1} \end{cases}$. Deux cas se présentent :

- Si n est un entier impair, $(n-1)$ est un entier pair, et $Q_n'(x)$ est du signe de $\left(x-\frac{2n}{n+1}\right)$. La fonction Q_n est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\frac{2n}{n+1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$.
- Si n est un entier pair, $(n-1)$ est un entier impair, et $Q_n'(x)$ est du signe de $x\times\left(x-\frac{2n}{n+1}\right)$. La fonction Q_n est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$ et strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0]$ et $\left[\frac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$.

Dans les deux cas, la restriction de Q_n à l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{2n}{n+1}\right]$ puis strictement croissante sur $\left[\frac{2n}{n+1}\,;_{gjulia}\ +\infty\right[$. Cette restriction admet un minimum en $\frac{2n}{n+1}$

$Q_n(1)=0$ (ce qui implique que le minimum est tel que : $Q_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0=Q_n(1)$) et d'autre part

$Q_n(2)=2^{n+1}-2\times 2^n+1=1$..

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, Q_n prend la valeur zéro une fois et une seule entre $\frac{2n}{n+1}$ et 1.

Il existe un unique réel a_n : $\frac{2n}{n+1}<a_n<1$ et $Q_n(a_n)=0$

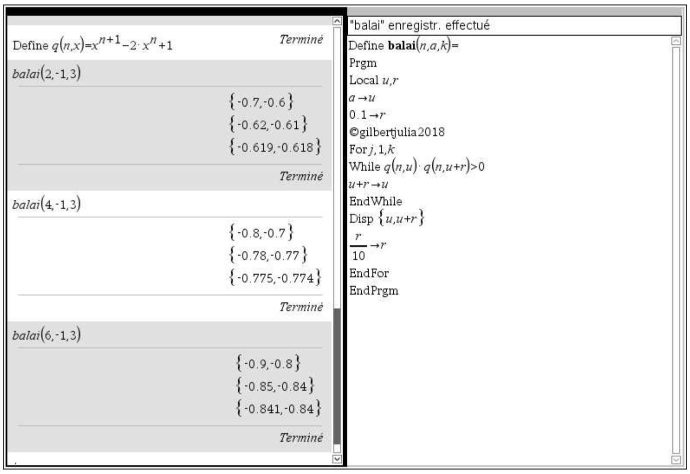
L'encadrement $\frac{2n}{n+1} < a_n < 1$ justifie que la suite (a_n) est encadrée par la suite constante égale à 1 et la suite ${}_{gj}\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ convergeant vers 1. D'après le théorème des gendarmes, elle converge elle-même vers 1.

Puisque $a_n \neq 1$, $Q_n(a_n) = 0 \Rightarrow P_n(a_n) = 0$. Le réel a_n est un réel positif ou nul solution de l'équation $P_n(x) = 0$. C'est le seul, car réciproquement, si a est un réel positif ou nul vérifiant $P_n(a) = 0$, alors $Q_n(a) = 0$. Ce qui implique que $a = a_n$ puisque l'équation $Q_n(x) = 0$ ne possède que a_n comme solution positive ou nulle.

6 et 7. $Q_{2k}(-1) = (-1)^{2k+1} - 2\times(-1)^{2k} + 1 \underset{gj}{=} -1 - 2 + 1 = -2$ et d'autre part $Q_{2k}(0) = 1$.

La restriction à l'intervalle $[-1\,;\,0]$ de la fonction Q_{2k} est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image par cette restriction, à savoir l'intervalle $[-2\,;\,1]$. Zéro appartenant à cet intervalle image, il existe un unique réel b_k de $[-1\,;\,0]$ tel que $Q_{2k}(b_k) = 0$

Le programme **balai**, quelque peu modifié pour la circonstance, fournit des encadrements d'amplitude 10^{-3} de b_1, b_2, b_3.



8.1. Pour tout réel x : $Q_{2k}(x) = x^{2k+1} - 2x^{2k} + 1 = x^{2k}(x-2) + 1$

$Q_{2k+2}(x) - Q_{2k}(x) = \left(x^{2k+2}(x-2)+1\right) - \left(x^{2k}(x-2)+1\right) = x^{2k}\left(x^2-1\right)(x-2)$

Pour tout nombre réel x appartenant à $]-1\,;\,0[$: $\underset{gilbertjulia\,2018}{}\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - 2 \leq -2 < 0 \text{ donc } Q_{2k+2}(x) - Q_{2k}(x) \geq 0 \\ x^{2k} \geq 0 \end{cases}$

8.2. En particulier : $Q_{2k+2}(b_k) - Q_{2k}(b_k) = Q_{2k+2}(b_k) \geq 0$.

En raison de la croissance stricte de la fonction Q_{2k} sur $]-\infty\,;\,0]$, b_k et b_{k+1} sont rangés dans le même ordre que leurs images : quel que soit l'entier k strictement positif, $Q_{2k+2}(b_k) \geq 0 \Rightarrow b_k \geq b_{k+1}$

La suite (b_{2k}) est décroissante et minorée par -1, elle converge vers une limite l qui est supérieure ou égale à -1.

9.1. Puisque $l \le b_k$ pour tout entier strictement positif *k*, $Q_{2k}(l) \le Q_{2k}(b_k) = 0$. $Q_{2k}(l)$ est négatif ou nul.

9.2. Sachant que pour tout $x \in]-1\,;0[$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(x^{2k+1} - 2x^{2k} + 1\right)_{gj\,2018} = 1$:

Si l'hypothèse $l \in]-1\,;0[$ était correcte, on pourrait trouver un entier k_0 tel que $k \ge k_0 \Rightarrow \left|\left(Q_{2k}(l)\right) - 1\right| \le \dfrac{1}{2}$ et par suite : $k \ge k_0 \Rightarrow Q_{2k}(l) \ge \dfrac{1}{2}$, ce qui contredirait le fait que $Q_{2k}(l) \le 0$ pour tout entier *k*. L'hypothèse $l \in]-1\,;0[$ devant être rejetée, il ne reste que $l = -1$

10. Pour tout entier $k > 0$: $Q_{2k}(b_k) = {b_k}^{2k}(b_k - 2) + 1 = 0$ et donc : ${b_k}^{2k} = \dfrac{1}{2 - b_k}$. La suite $\left({b_k}^{2k}\right)$ est l'image de la suite (b_k) par la fonction *g* : $x \mapsto g(x) = \dfrac{1}{2 - x}$, continue sur $[-1\,;0]$. Puisque (b_k) est une suite de termes appartenant tous à $[-1\,;0]$ qui converge vers -1, la suite $\left({b_k}^{2k}\right)$ converge vers $g(-1) = \dfrac{1}{3}$.

Le programme **bedeuca** affiche des encadrements des premiers termes de la suite $\left({b_k}^{2k}\right)$, ce qui illustre assez bien le résultat précédent.

Le programme **balai** a été quelque peu modifié pour la circonstance.

On peut de plus conjecturer la décroissance de la suite $\left({b_k}^{2k}\right)$.

Il en est en effet ainsi. La fonction *g* est une fonction croissante sur $[-1\,;0]$, elle conserve le sens des inégalités. Puisque la suite (b_k) est une suite décroissante de termes appartenant tous à $[-1\,;0]$, son image par *g* est une suite décroissante de termes appartenant tous à $g([-1\,;0])$