Concours général 2018, problème 1 : Polynômes de Bernstein, courbes de Bézier

1. Le sujet

NB. Le texte original a été intentionnellement un peu modifié dans la partie B du sujet.

Partie A : Polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel i tel que $0 \leq i \leq n$, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0\,;1]$ par : $B_{n,i}(p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1}$.

Ainsi : $B_{0,0}(p) = 1$; $B_{1,0}(p) = 1-p$; $B_{1,1}(p) = p$. Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

1.1. Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$; $B_{2,1}(p)$; $B_{2,2}(p)$

1.2. Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n = 3$, à savoir $B_{3,0}(p)$; $B_{3,1}(p)$; $B_{3,2}(p)$; $B_{3,3}(p)$.

2.1. Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$; $B_{n,n}(p)$?

2.2. Démontrer que pour tout $n > 1$ et tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$: $B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}(p)$

3.1. En quelle(s) valeur(s) de p s'annule un polynôme de Bernstein ?

3.2. Qu'en est-il de son signe sur $[0\,;1]$?

4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $\sum_{i=0}^{i=n} B_{n,i}(p) = 1$.

5. Déterminer les valeurs des sommes : $\sum_{i=0}^{i=n} i\,B_{n,i}(p)$ et $\sum_{i=0}^{i=n} i^2\,B_{n,i}(p)$. Que représentent ces sommes en termes de probabilités ?

Partie B : Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i}\ \vec{j}\right)$. Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan $P_0,\ P_1,...,\ P_n$.

On appelle ***courbe de Bézier*** de degré n et de points de contrôle $P_0,\ P_1,...,\ P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(p)}=\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i}\ .$$

Dans les questions **2** et **3**, on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se donne donc trois points du plan non alignés *A, B, C*.

1. Reconnaître la nature géométrique :
1.1. De la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle *A*.
1.2. De la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle *B* et *C*.

2. On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle *A*, *B* et *C*.

2.1. Justifier que les points *A* et *C* appartiennent à cette courbe. Le point *B* y appartient-il ?

2.2. Dans cette question, on prend les points de coordonnées $A\,(-2\ ;\ 5)$, $B\,(2\ ;\ 1)$ et C dont on propose des coordonnées ci-dessous. Dans l'un ou l'autre des deux cas (à votre choix), proposer une construction des points de cette courbe pour $p=\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}$ puis tracer la courbe à main levée.
2.2.1. *C* est le point de coordonnées $C\,(4\ ;\ 3)$. (*Choix du texte original de l'énoncé*)
2.2.2. *C* est le point de coordonnées $C\,(6\ ;\ 3)$. (*Ma proposition personnelle*)

3.1. Montrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle *ABC*.

3.2. On note *B'* le milieu du segment [*BC*]. Démontrer la relation : $\overrightarrow{AM(p)}=2p^2\overrightarrow{BB'}+2p\overrightarrow{AB}$.
Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

4. *Une généralisation et une construction récursive des points* $M(p)$.
On suppose que $n\geq 2$ et on considère $(n+1)$ points de contrôle $P_0,\ P_1,...,\ P_n$ (donc au moins trois points de contrôle)
Pour tout réel p appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on note $U(p)$ le point défini par : $\overrightarrow{OU(p)}=\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$

et on note $V(p)$ le point défini par : $\overrightarrow{OV(p)}=\sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(p)\overrightarrow{OP_{i+1}}$.
Montrer que $M(p)$ est le barycentre de $\{(U(p)\ ;1-p)\quad (V(p)\ ;\ p)\}$

Le point $M(p)$ *est ainsi construit à partir de deux points de même nature mais dépendant de n points de contrôle, l'un des points* $P_0,\ P_1,...,\ P_{n-1}$ *et l'autre des points* $P_1,\ P_2,...,\ P_n$.

2. Quelques pistes de résolution

Partie A : Polynômes de Bernstein

Le polynôme de Bernstein $B_{n,i}(p)$ défini pour p variant dans l'intervalle $[0\,;1]$ représente en termes probabilistes la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p prenne la valeur i.
Pour cette raison, il est intéressant de traiter cette partie en lien avec des révisions sur la loi binomiale.

D'autre part, le coefficient binomial $\binom{n}{i}$ figure dans l'expression de $B_{n,i}(p)$. Revoir si besoin est les formules de récurrence liant, pour $0<i<n$, le coefficient binomial $\binom{n}{i}$ à deux coefficients binomiaux de rang $n-1$.

Les questions **1.1** et **1.2** calculent les expressions des polynômes de Bernstein pour $n=2$ puis $n=3$.

2. Distinguer les cas $i=0$ et $i=n$ d'une part et le cas $0<i<n$ d'autre part pour lesquels on mettra en œuvre les formules de récurrence entre $\binom{n}{i}$ et deux coefficients binomiaux de rang $n-1$.

$$(1-p)B_{n-1,i}(p)+p\,B_{n-1,i-1}(p)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=B_{n,i}(p)$$

3. Si l'on excepte $B_{0,0}$ qui est un polynôme constant, égal à une constante strictement positive, les expressions des polynômes de Bernstein $B_{n,i}$ sont des expressions factorisées où figurent p et/ou (selon les cas) $(1-p)$.

4. On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}a^i\,b^{n-i}$. L'appliquer avec des valeurs remarquables de a et de b.

5. Les sommes demandées ont un lien l'une avec l'espérance mathématique d'une loi binomiale (c'est exactement l'espérance), l'autre avec la variance de cette loi.

Une méthode de calcul de l'espérance mathématique liée à la loi binomiale utilise la fonction numérique $x\mapsto f(x)=(x+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}$ en la dérivant de deux façons (mais ce n'est pas la méthode usuelle). Il n'est pas impossible de la trouver dans un manuel. S'en inspirer. Pour $\sum_{i=0}^{i=n}i^2\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$, on peut tenter de dériver deux fois.

Partie B : Des courbes de Bézier

Traiter cette partie en parallèle avec le problème sur les courbes de Bézier proposé dans la rubrique « Géométrie » de la page « Ecrit du CAPES ». Il y est question aussi de courbes de Bézier de degré 2. Elles ne sont pas construites de la même façon mais, justement, il est intéressant de comparer les deux points de vue.

Cette partie est liée à la notion de barycentre. Le point $M(p)$ est le barycentre du système $\{(A_i\,,\,B_{n,i}(p))_{gjulia}\ i=1,2,...,n\}$.

Puisque $\sum_{i=1}^{n} B_{n,i}(p)=1$, le poids total du système de points pondérés est égal à 1.

1. La question **1.2** établit qu'une courbe de Bézier à deux points de contrôle est le segment d'extrémités ces deux points. Elle a une importance « théorique » pour la suite.

2 et **3**. Dans le cas d'une courbe de Bézier de degré 2, on obtient des expressions du second degré en *p*.
Deux jeux de coordonnées sont proposés pour le point *C*.
Dans un cas, l'abscisse du point $M(p)$ est du premier degré en *p* (les termes du second degré s'éliminant) et l'ordonnée de ce point est du second degré en *p*. On peut exprimer *p* en fonction de $x_{M(p)}$ puis remplacer dans l'expression de $y_{M(p)}$. On obtient l'équation d'une parabole.
Dans l'autre cas, l'abscisse et l'ordonnée du point $M(p)$ sont toutes les deux du deuxième degré. Il faudra trouver une combinaison entre $x_{M(p)}$ et $y_{M(p)}$ pour pouvoir éliminer le paramètre *p* entre ces deux coordonnées. On obtient une équation du second degré avec des termes en x^2, y^2 … et en $x\times y$. Il est plus difficile d'identifier la nature de l'ensemble des points $M(p)$.

La question **3.2** permet une identification de cette nature, dans un repère qui n'est pas un repère orthonormal (mais ce n'est pas un problème …).

Ne pas oublier de traiter une *réciproque*. Etant donné un point situé sur la parabole support de l'ensemble des points $M(p)$, à quelle condition ce point est-il véritablement un point $M(p)$?

4. Cette question, qui ne figure pas dans le sujet original, permet de montrer comment un point situé sur une courbe de Bézier de degré *n* peut être construit à partir de deux points situés sur une courbe de Bézier de degré $n-1$. Il est possible de la traiter plus tôt dans le problème.

Notamment, on peut s'appuyer sur le résultat de cette question pour expliquer pourquoi la courbe de degré 2 et de points de contrôle *A*, *B* et *C* est située dans le triangle *ABC*. Il en est de même pour proposer, dans cette même situation, une construction de $M(p)$ lorsque $p =_{gj} \frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{3}{4}$.