Concours général 2018, problème 1 : Polynômes de Bernstein, courbes de Bézier

1. Le sujet

NB. Le texte original a été intentionnellement un peu modifié dans la partie B du sujet.

Partie A : Polynômes de Bernstein

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel i tel que $0 \leq i \leq n$, on note $B_{n,i}$ le polynôme défini pour p variant dans l'intervalle $[0\,;1]$ par : $B_{n,i}(p)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-1}$.

Ainsi : $B_{0,0}(p)=1$; $B_{1,0}(p)=1-p$; $B_{1,1}(p)=p$. Ces polynômes sont appelés ***polynômes de Bernstein***.

1.1. Donner l'expression de $B_{2,0}(p)$; $B_{2,1}(p)$; $B_{2,2}(p)$

1.2. Déterminer l'expression des polynômes de Bernstein pour $n=3$, à savoir $B_{3,0}(p)$; $B_{3,1}(p)$; $B_{3,2}(p)$; $B_{3,3}(p)$.

2.1. Quelle est l'expression de $B_{n,0}(p)$; $B_{n,n}(p)$?

2.2. Démontrer que pour tout $n>1$ et tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$: $B_{n,i}(p)=(1-p)B_{n-1,i}(p)+p\,B_{n-1,i-1}(p)$

3.1. En quelle(s) valeur(s) de p s'annule un polynôme de Bernstein ?

3.2. Qu'en est-il de son signe sur $[0\,;1]$?

4. Démontrer que les polynômes de Bernstein d'un même degré n forment une partition de l'unité, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n : $\sum_{i=0}^{i=n} B_{n,i}(p)=1$.

5. Déterminer les valeurs des sommes : $\sum_{i=0}^{i=n} i\,B_{n,i}(p)$ et $\sum_{i=0}^{i=n} i^2\,B_{n,i}(p)$. Que représentent ces sommes en termes de probabilités ?

Partie B : Des courbes de Bézier

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} \ \vec{j})$. Soit n un entier naturel. On se donne $n+1$ points non alignés du plan $P_0, P_1, ..., P_n$.

On appelle ***courbe de Bézier*** de degré n et de points de contrôle $P_0, P_1, ..., P_n$ l'ensemble des points $M(p)$ du plan avec p variant dans l'intervalle $[0 ; 1]$ tels que :

$$\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i} .$$

Dans les questions **2** et **3**, on va s'intéresser à des courbes de Bézier de degré 0, 1 ou 2.
On se donne donc trois points du plan non alignés *A, B, C*.

1. Reconnaître la nature géométrique :
1.1. De la courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle *A*.
1.2. De la courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle *B* et *C*.

2. On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle *A*, *B* et *C*.

2.1. Justifier que les points *A* et *C* appartiennent à cette courbe. Le point *B* y appartient-il ?

2.2. Dans cette question, on prend les points de coordonnées $A(-2 ; 5)$, $B(2 ; 1)$ et C dont on propose des coordonnées ci-dessous. Dans l'un ou l'autre des deux cas (à votre choix), proposer une construction des points de cette courbe pour $p = \frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{4}$ puis tracer la courbe à main levée.
2.2.1. *C* est le point de coordonnées $C(4 ; 3)$. (*Choix du texte original de l'énoncé*)
2.2.2. *C* est le point de coordonnées $C(6 ; 3)$. (*Ma proposition personnelle*)

3.1. Montrer que cette courbe est nécessairement inscrite dans le triangle *ABC*.

3.2. On note *B'* le milieu du segment [*BC*]. Démontrer la relation : $\overrightarrow{AM(p)} = 2p^2\overrightarrow{BB'} + 2p\overrightarrow{AB}$.
Quelle pourrait être la nature géométrique de cette courbe de Bézier de degré 2 ? Justifier votre réponse.

4. *Une généralisation et une construction récursive des points* $M(p)$.
On suppose que $n \geq 2$ et on considère $(n+1)$ points de contrôle $P_0, P_1, ..., P_n$ (donc au moins trois points de contrôle)
Pour tout réel p appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$, on note $U(p)$ le point défini par : $\overrightarrow{OU(p)} = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(p)\overrightarrow{OP_i}$

et on note $V(p)$ le point défini par : $\overrightarrow{OV(p)} = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(p)\overrightarrow{OP_{i+1}}$.
Montrer que $M(p)$ est le barycentre de $\{(U(p) ; 1-p) \quad (V(p) ; p)\}$

Le point $M(p)$ *est ainsi construit à partir de deux points de même nature mais dépendant de n points de contrôle, l'un des points* $P_0, P_1, ..., P_{n-1}$ *et l'autre des points* $P_1, P_2, ..., P_n$.

2. Eléments de correction

Partie A : Polynômes de Bernstein

Quelques résultats classiques que l'on retrouve dans nombre de circonstances …

1.1. $B_{2,0}(p)=(1-p)^2$; $B_{2,1}(p)=2\,p(1-p)$; $B_{2,2}(p)=p^2$

1.2. $B_{3,0}(p)=(1-p)^3$; $B_{3,1}(p)=3\,p(1-p)^2$; $B_{3,2}(p)=3\,p^2(1-p)$; $B_{3,3}(p)=p^3$.

2.1. $B_{n,0}(p)=(1-p)^n$; $B_{n,n}(p)=p^n$

2.2. Pour $n>1$ et pour $1\leq i\leq n-1$:

D'une part : $(1-p)B_{n-1,i}(p)=(1-p)\left(\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i}\right)=\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-i}$.

D'autre part : $p\,B_{n-1,i-1}(p)=p\left(\binom{n-1}{i-1}p^{i-1}(1-p)^{(n-1)-(i-1)}\right)=\binom{n-1}{i-1}p^i(1-p)^{n-i}$

Par addition : $(1-p)B_{n-1,i}(p)+p\,B_{n-1,i-1}(p)=\left(\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right)p^i(1-p)^{n-i}$

En tenant compte de la relation de Pascal concernant les coefficients binomiaux, c'est-à-dire : $\binom{n}{i}=\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}$ (pour $n>1$ et pour $1\leq i\leq n-1$), on obtient :

$$(1-p)B_{n-1,i}(p)+p\,B_{n-1,i-1}(p)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}=B_{n,i}(p)$$

Et en outre particulièrement : pour $0=i<n$: $B_{n,0}=(1-p)B_{n-1,0}$ et pour $0<i=n$: $B_{n,n}=p\,B_{n-1,n-1}$

3.1. Si l'on excepte $B_{0,0}$ qui est un polynôme constant, égal à une constante strictement positive, les expressions données des polynômes de Bernstein $B_{n,i}$ sont des expressions factorisées, en général en deux facteurs exactement : p et $(1-p)$.

Si $i\geq 1$, au moins un facteur p figure dans sa factorisation et si $i<n$, au moins un facteur $(1-p)$ figure dans sa factorisation. Pour $0<i<n$, $B_{n,i}$ s'annule en zéro et en 1 et seulement en ces deux points.

Les cas de factorisation en un seul facteur sont : $B_{n,0}(p)=(1-p)^n$ qui s'annule en 1 et seulement en 1 et $B_{n,n}(p)=p^n$ qui s'annule en zéro et seulement en zéro.

3.2. Quelles que soient les circonstances, chacun des facteurs de $B_{n,i}$ est positif sur $[0\,;1]$, il en est de même de $B_{n,i}$.

4. On rappelle la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}a^i\,b^{n-i}$ que l'on applique avec $a=p$; $b=1-p$. Et de ce fait avec $a+b=1$. On obtient : $1=1^n=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$

5.1. Pour $n\geq 1$, on considère la fonction numérique $x\mapsto f(x)=(x+b)^n=\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}$ que l'on dérive de deux façons : $f'(x)=n(x+b)^{n-1}=_{gilbertjulia}\sum_{i=1}^{i=n}i\binom{n}{i}x^{i-1}\,b^{n-i}$. On en déduit :

$x\,f'(x)=n\,x\,(x+b)^{n-1}=\sum_{i=1}^{i=n}i\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}=\sum_{i=0}^{i=n}i\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}$ car pour l'indice zéro la sommation ajoute un terme nul.

Pour $x=p$; $b=1-p$, on obtient : $n\,p=_{gj}\sum_{i=0}^{i=n}i\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$

Si l'on dérive une deuxième fois de deux façons :

$f''(x)=n(n-1)(x+b)^{n-2}=\sum_{i=2}^{i=n}i\,(i-1)\binom{n}{i}x^{i-2}\,b^{n-i}$ et donc :

$x^2 f''(x)=n(n-1)x^2\,(x+b)^{n-2}=_{gjulia}\sum_{i=2}^{i=n}i\,(i-1)\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}=\sum_{i=0}^{i=n}i\,(i-1)\binom{n}{i}x^i\,b^{n-i}$ (pour les indices 0 et 1, la sommation ajoute un terme nul)

Pour $x=p$; $b=1-p$, on obtient :

$$n(n-1)\,p^2=_{gjulia}\sum_{i=0}^{i=n}i\,(i-1)\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}=\sum_{i=0}^{i=n}i^{\,2}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}-\sum_{i=0}^{i=n}i\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$$

C'est-à-dire : $n(n-1)\,p^2+n\,p=_{gjulia}\sum_{i=0}^{i=n}i^{\,2}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$

En termes probabilistes, le polynôme de Bernstein $B_{n,i}(p)$ représente la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres *n* et *p* prenne la valeur *i*.

$n\,p=\sum_{i=0}^{i=n}i\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$ représente l'espérance d'une telle variable aléatoire.

$n(n-1)\,p^2+n\,p=_{gjulia}\sum_{i=0}^{i=n}i^{\,2}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}$ a un lien avec la variance de cette variable aléatoire.

Cette dernière est égale à : $_{gjulia}\left(\sum_{i=0}^{i=n}i^{\,2}\binom{n}{i}p^i\,(1-p)^{n-i}\right)-n^2p^2=n\,p\,(1-p)$

Partie B : Des courbes de Bézier

1.1. La courbe de Bézier de degré 0 et de point de contrôle A est le singleton $\{A\}$: en effet pour tout réel p de l'intervalle $[0\,;1]$, $\overrightarrow{OM(p)}=\overrightarrow{OA}$

1.2. La courbe de Bézier de degré 1 et de points de contrôle B et C est le segment $[BC]$. En effet pour tout réel p de l'intervalle $[0\,;1]$, $\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}$ et par conséquent $\overrightarrow{BM(p)}=p\overrightarrow{BC}$ avec p variant dans l'intervalle $[0\,;1]$.

3.1. On s'intéresse à la courbe de Bézier de degré 2 et de points de contrôle A, B et C.
Pour tout réel p de l'intervalle $[0\,;1]$, le point $M(p)$ est défini par la relation vectorielle :

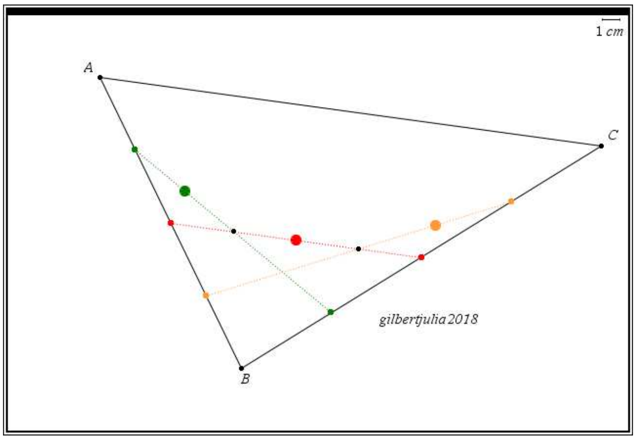
$$\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)^2\,\overrightarrow{OA}\underset{gjulia}{+}2p(1-p)\overrightarrow{OB}+p^2\,\overrightarrow{OC}\qquad \textbf{(1)}$$

La relation vectorielle **(1)** s'écrit aussi : $\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)\big((1-p)\overrightarrow{OA}+p\,\overrightarrow{OB}\big)+p\big((1-p)\overrightarrow{OB}+p\,\overrightarrow{OC}\big)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)\big((1-p)\overrightarrow{OA}+p\,\overrightarrow{OB}\big)+p\big((1-p)\overrightarrow{OB}+p\,\overrightarrow{OC}\big)$
Si $U(p)$ désigne le barycentre de $\{(A,1-p)\,;(B,\ p)\}$ et $V(p)$ désigne le barycentre de $\{(B,1-p)\,;(C,\ p)\}$,
$\overrightarrow{OU(p)}=(1-p)\overrightarrow{OA}+p\,\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OV(p)}=(1-p)\overrightarrow{OB}+p\,\overrightarrow{OC}$.
Alors : $\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)\overrightarrow{OU(p)}+p\overrightarrow{OV(p)}$. Le point $M(p)$ est le barycentre de $\{(U(p),1-p)\,;(V(p),\ p)\}$.
Ce résultat sera généralisé dans la question **4**.
Pour tout réel p appartenant à $[0\,;1]$, le point $U(p)$ est un point du segment [AB] et $V(p)$ est un point du segment [BC]. Le segment $[U(p)V(p)]$ est inclus dans le triangle ABC. Le point $M(p)$ étant un point de ce segment, il est intérieur au triangle ABC.

On peut voir les choses autrement : Le point $M(p)$ est pour tout réel p de l'intervalle $[0\,;1]$ un barycentre des points A, B, C affectés de coefficients tous positifs et non tous nuls puisque de somme 1. Il appartient donc à l'enveloppe convexe du trio $\{A,B,C\}$, c'est-à-dire à l'intérieur du triangle ABC frontières comprises.

2.1. $A=M(0)$ et $C=M(1)$ appartiennent à cette courbe. Le point B non car dans le choix des pondérations affectées à A, B, C, celles de A et de C ne sont jamais simultanément nulles.

2.2. De façon générale, quelles que soient les coordonnées des points A, B, C :
Cas de $p=\dfrac{1}{2}$: les points $U\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $V\left(\dfrac{1}{2}\right)$ sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
et le point $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est milieu du segment $\left[U\left(\dfrac{1}{2}\right)V\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]$ (points rouges ci-contre)



Cas de $p=\dfrac{1}{4}$: les points $U\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et $V\left(\dfrac{1}{4}\right)$ sont tels que $\overrightarrow{AU\left(\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BV\left(\frac{1}{4}\right)}\underset{gjulia}{=}\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{U\left(\frac{1}{4}\right)M\left(\frac{1}{4}\right)}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{U\left(\frac{1}{4}\right)V\left(\frac{1}{4}\right)}$ (points verts ci-contre)

Cas de $p=\frac{3}{4}$: les points $U\left(\frac{3}{4}\right)$ et $V\left(\frac{3}{4}\right)$ sont tels que $\overrightarrow{AU\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BV\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ puis $\overrightarrow{U\left(\frac{3}{4}\right)M\left(\frac{3}{4}\right)}\underset{gj}{=}\frac{3}{4}\overrightarrow{U\left(\frac{3}{4}\right)V\left(\frac{3}{4}\right)}$. Ce cas est symétrique du précédent, les rôles de A et C étant échangés (points orange ci-dessus).

On utilise maintenant les coordonnées des points A, B, C :

2.2.2. On choisit ici comme coordonnées de C les coordonnées $C\,(6\,;3)$:
Si $(x_p,\, y_p)$ sont les coordonnées de $M(p)$:

$$\underset{gjulia}{}\begin{cases} x_p=-2(1-p)^2+4p(1-p)+6p^2=8p-2 \\ y_p=5(1-p)^2+2p(1-p)+3p^2=6p^2-8p+5 \end{cases}\cdot$$

En particulier, $M\left(\frac{1}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{27}{8}\right)$; $M\left(\frac{3}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(4\,;\frac{19}{8}\right)$; $M\left(\frac{1}{2}\right)$ a pour coordonnées $\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$.

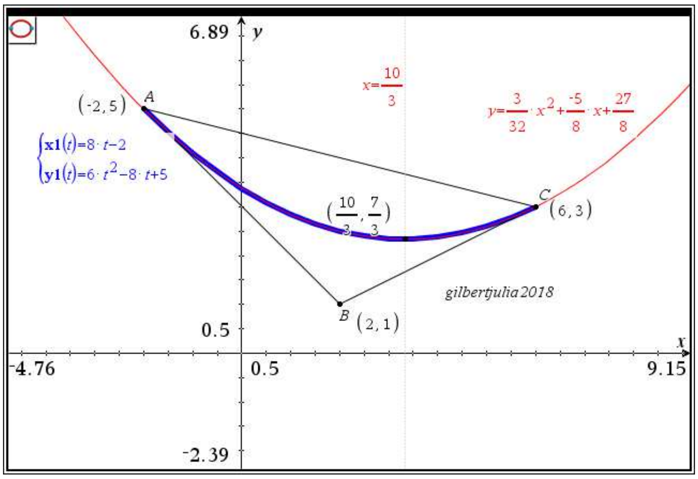
De ces relations paramétriques, on déduit que : $p=\frac{x_p+2}{8}$ ce qui permet une élimination aisée du paramètre :

$$y_p=6\frac{(x_p+2)^2}{64}-8\frac{x_p+2}{8}+5.$$

On obtient une relation indépendante du paramètre p entre les coordonnées de $M(p)$:

$$y\underset{gjulia}{=}\frac{3}{32}x^2-\frac{5}{8}x+\frac{27}{8}$$

L'ensemble des points $M(p)$ est inclus dans une parabole passant par A et par C.



Réciproquement, un point $M(x,y)$ de cette parabole est un point $M(p)$ si le réel $p=\frac{x+2}{8}$ est dans l'intervalle $[0\,;1]$ c'est-à-dire si : $-2\le x\le 6$, autrement dit si l'abscisse de M est entre celle de A et celle de C. L'ensemble des points $M(p)$ est l'arc AC de ladite parabole.

2.2.1. Le texte original propose $C\,(4\,;3)$ comme troisième point C.
On obtient dans ce cas les résultats suivants :

$$\underset{gjulia}{}\begin{cases} x_p=-2(1-p)^2+4p(1-p)+4p^2=-2p^2+8p-2 \\ y_p=5(1-p)^2+2p(1-p)+3p^2=6p^2-8p+5 \end{cases}\cdot$$

En particulier, $M\left(\frac{1}{4}\right)$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{8}\,;\frac{27}{8}\right)$; $M\left(\frac{3}{4}\right)$ pour coordonnées $\left(\frac{23}{8}\,;\frac{19}{8}\right)$; $M\left(\frac{1}{2}\right)$ pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

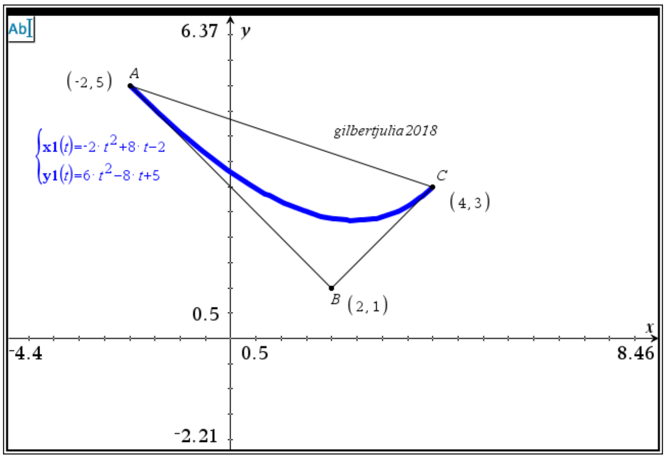
De ces relations paramétriques, on déduit que : $p=\frac{3x_p+y_p+1}{16}$ ce qui permet une élimination du paramètre :

$$y_p=6\frac{(3x_p+y_p+1)^2}{256}-\frac{3x_p+y_p+1}{2}+5.$$

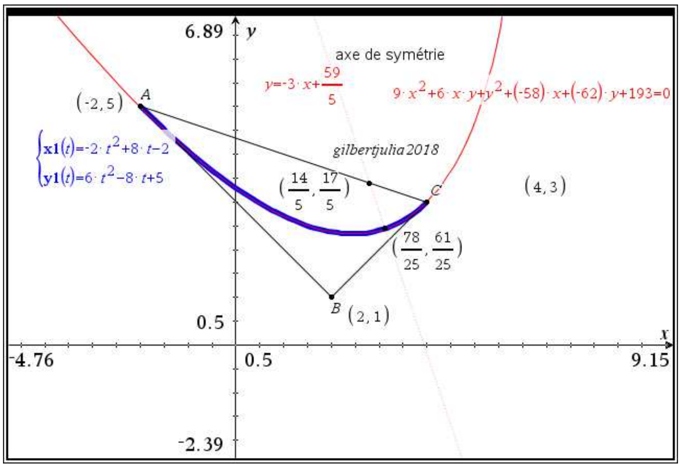
On obtient une relation indépendante du paramètre p un peu plus loufoque entre les coordonnées de $M(p)$:

$$9x^2+6xy+_{gj}\,y^2-58x-62y+193=0$$

Le support de l'ensemble des points $M(p)$ est une conique, en l'occurrence une parabole puisque le discriminant des termes du deuxième degré de son équation cartésienne est égal à zéro.



Voici une analyse graphique de cette conique, faite par le logiciel T*n*Spire. Notons que l'axe de symétrie de cette parabole a paraît-il pour équation $y=-3x+\frac{59}{5}$, chose qui n'est pas anodine.



Réciproquement en effet, un point $M(x,y)$ de cette parabole est un point $M(p)$ si le réel $p=\frac{3x+y+1}{16}$ est dans l'intervalle $[0\,;1]$ c'est-à-dire si : $-3x-1\le y\le -3x+15$, autrement dit si M est dans la bande délimitée par les deux parallèles à l'axe de symétrie de la parabole passant l'une par A et l'autre par C. L'ensemble des points $M(p)$ est l'arc AC de ladite parabole.

3.2. En considérant la relation : $\overrightarrow{OM(p)}=(1-p)^2\,\overrightarrow{OA}+_{gjulia}\,2p(1-p)\overrightarrow{OB}+p^2\,\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OM(p)}=\overrightarrow{OA}+2p\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)+p^2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}+2p\,\overrightarrow{AB}+p^2\left(2\overrightarrow{OB'}-2\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}+2p\,\overrightarrow{AB}+2p^2\,\overrightarrow{BB'}$$

.

Finalement : $\overrightarrow{AM(p)}=2p\,\overrightarrow{AB}+2p^2\,\overrightarrow{BB'}$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont non colinéaires et forment une base du plan : puisque A, B, C sont non alignés, le milieu de [AC] n'est en effet pas aligné avec A et B.

Si on rapporte le plan au repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{BB'},\overrightarrow{AB}\right)$, une représentation paramétrique dans ce repère de l'ensemble des points $M(p)$ est $\begin{cases} x = 2p \\ y = 2p^2 \end{cases};\ p \in [0\,;1]$ et une équation cartésienne en est $y = \frac{1}{2}x^2$; $0 \le x \le 2$. On reconnaît une équation cartésienne d'arc de parabole.
Cet arc de parabole est limité par le point A et par le point dont les coordonnées dans ce nouveau repère sont $(2,\,2)$. Il s'agit du point C car $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC}$
On retrouve dans le cas général les conclusions de la question précédente.

4. Compte tenu que $n \ge 2$ $\overrightarrow{OM(p)} = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i} = B_{n,0}(p)\overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n-1} B_{n,i}(p)\overrightarrow{OP_i} + B_{n,n}(p)\overrightarrow{OP_n}$

On applique les relations de récurrence vues à propos des polynômes de Bernstein : $B_{n,0} = (1-p)B_{n-1,0}$ et $B_{n,n} = p\,B_{n-1,n-1}$ d'une part et généralement $B_{n,i}(p) = (1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}(p)$ d'autre part.

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)B_{n-1,0}(p)\overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n-1}\left((1-p)B_{n-1,i}(p) + p\,B_{n-1,i-1}\right)(p)\,\overrightarrow{OP_i} + pB_{n-1,n-1}(p)\overrightarrow{OP_n}$$

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)\left(B_{n-1,0}(p)\overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(B_{n-1,i}(p)\right)\overrightarrow{OP_i}\right) + p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(B_{n-1,i-1}(p)\right)\overrightarrow{OP_i} + B_{n-1,n-1}(p)\overrightarrow{OP_n}\right)$$

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{n-1,i}(p)\right)\overrightarrow{OP_i}\right) + p\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(B_{n-1,i-1}(p)\right)\overrightarrow{OP_i} + B_{n-1,n-1}(p)\overrightarrow{OP_n}\right).$$

En effectuant la réindexation $j = i-1$ dans la somme de la deuxième parenthèse :

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{n-1,i}(p)\right)\overrightarrow{OP_i}\right) + p\left(\sum_{j=0}^{n-2}\left(B_{n-1,j}(p)\right)\overrightarrow{OP_{j+1}} + B_{n-1,n-1}(p)\overrightarrow{OP_n}\right).$$

$$\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(B_{n-1,i}(p)\right)\overrightarrow{OP_i}\right) + p\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(B_{n-1,j}(p)\right)\overrightarrow{OP_{j+1}}\right).$$

Ce qui donne : $\overrightarrow{OM(p)} = (1-p)\overrightarrow{OU(p)} + p\,\overrightarrow{OV(p)}$ et prouve que $M(p)$ est le barycentre de $\{(U(p)\,;1-p)\quad(V(p)\,;\ p)\}$.

Le point $M(p)$ peut être construit à l'aide des points $U(p)$ et $V(p)$, lesquels sont de même nature que $M(p)$ mais dépendent chacun d'un point de contrôle de moins.

En itérant le procédé, il est possible de construire $M(p)$ en se ramenant à des constructions de barycentres dépendant de deux points de contrôle seulement.