Concours général 2017 série S. Indications

Problème 1 : Parties de C de type S

Un ensemble « de type S » est un ensemble de nombres complexes stable par multiplication et par somme de carrés.

Partie B : Deux exemples de parties de **C** de type *S*

*L'ensemble **Z** des entiers relatifs, muni de l'addition et de la multiplication possède une structure algébrique d'anneau, c'est-à-dire que :*

- ***Z** est un groupe pour addition (la somme et la différence de deux entiers relatifs sont des entiers relatifs ; zéro, élément neutre pour l'addition est un entier relatif ; l'opposé d'un entier relatif est un entier relatif)*
- ***Z** est stable par multiplication (le produit de deux entiers relatifs est un entier relatifs)*

Dans ces conditions, tout cocktail de sommes, différences et produits d'entiers relatifs est un entier relatif. Nous utiliserons à plusieurs reprises cette propriété.

1.3. Soit $z = a + b\,j = \left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{b\sqrt{3}}{2} i$, où a et b sont deux entiers relatifs, un élément de $\mathbf{Z}[j]$.

Alors $|z|^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 - a\,b + b^2$.

Il s'agit de faire l'inventaire des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ dont le module est inférieur ou égal à 1.

Considérer l'expression : $m(a,b) = |z|^2 - 1 = a^2 - a\,b + b^2 - 1$ comme une expression du second degré en a, dont le discriminant est $4 - 3b^2$. En étudier le signe.

1.4. En ce qui concerne $Z[j]^*$, ensemble des éléments non nuls de l'ensemble précédent :

Cet ensemble est clairement stable par multiplication.
En revanche, nous devons justifier que si $z_1 = a_1 + b_1\,j$ et $z_2 = a_2 + b_2\,j$ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{Z}[j]$, alors ${z_1}^2 + {z_2}^2$ est lui aussi non nul, ce résultat n'est pas acquis et nécessite une vérification.

2. On définit la partie R de $\mathbf{C}$ par $R = \left\{z \in \mathbf{C},\ z^2 \in \mathbf{Z}[j]\right\}$.
Ainsi un nombre complexe z est dans R si et seulement si son carré est dans $\mathbf{Z}[j]$.

2.2. Les racines carrées des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1 sont par définition dans R et ont un module inférieur ou égal à 1 et réciproquement, si z est un élément de R de module inférieur ou égal à 1, son carré appartient à $\mathbf{Z}[j]$ et a un module inférieur ou égal à 1.

En d'autres termes, on obtient les éléments de R de module inférieur ou égal à 1 en cherchant les racines carrées des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1.
On peut remarquer au passage que, contrairement à $\mathbf{Z}[j]^*$, R^* n'est pas de type S.

Partie C : À la recherche des valeurs possibles de $b(A)$

1. Pour tout élément a d'un ensemble A de type S vérifier que la suite $\left(a^n\right)_{n\in N^*}$ est une suite d'éléments de S.

2. On sait que de façon générale pour tous réels u et v : $\mathbf{e}^{iu}+\mathbf{e}^{iv}=2\cos\left(\frac{u-v}{2}\right).\mathbf{e}^{i\left(\frac{u+v}{2}\right)}$.

Ce complexe a pour module : $\left|\mathbf{e}^{iu}+\mathbf{e}^{iv}\right|=2\left|\cos\left(\frac{u-v}{2}\right)\right|$.

Dans le même ordre d'idées : $\left(\mathbf{e}^{iu}\right)^2+\left(\mathbf{e}^{iv}\right)^2=\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}=2\cos(u-v).\mathbf{e}^{i(u+v)}$

Ce complexe a pour module : $\left|\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}\right|=2\left|\cos(u-v)\right|$.

Reste à exploiter ceci avec $\frac{\pi}{6}<u<\frac{2\pi}{3}$ ni multiple de $\frac{\pi}{4}$ ni multiple de $\frac{\pi}{6}$ puis avec $0<u<\frac{\pi}{6}$, etc …

4. Considérer l'ensemble $\mathbf{Z}[i]=\left\{a+b\,i\ ;\ (a,\ b)\in\mathbf{Z}^2\right\}$.

5. Considérer l'ensemble R' des nombres dont le carré appartient à $\mathbf{Z}[i]$.

Problème 2 : C'est probablement bon

Partie A : Franck passe un premier examen

Franck connaît les réponses des six premières questions. Il lui manque un point pour réussir l'examen. Il doit répondre à au moins une des questions dont il ne connaît pas la réponse.

Pour $1 \le i \le 4$, désignons par B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse à la question numéro $6+i$ est exacte et zéro sinon. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Désignons par k le nombre de questions à réponse inconnue auxquelles Franck décide de répondre ($1 \le k \le 4$).

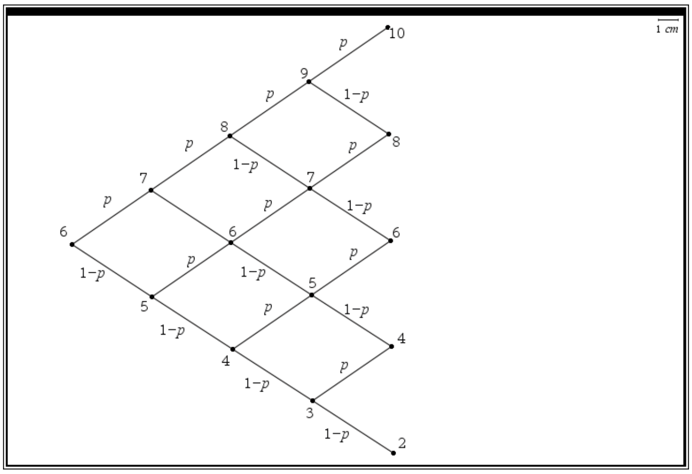
Désignons par X_k le nombre de réponses exactes obtenues par Franck parmi les k questions à réponse inconnue auxquelles il répond. C'est-à-dire que $X_k = \sum_{i=1}^{i=k} B_i$. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

Le nombre Y_k de points obtenus par Franck à son examen dans ces conditions est lié à X_k par la relation : $Y_k = 6 + (2X_k - k)$

Soit S_k l'évènement : « Franck réussit son examen en répondant à k questions à réponse inconnue » (avec $1 \le k \le 4$).

Franck réussit son examen si et seulement si $Y_k \ge 7$, c'est-à-dire si et seulement si $2X_k - k \ge 1$ ou, ce qui revient au même, si et seulement si $X_k \ge \dfrac{k+1}{2}$.

Le diagramme en arbre ci-contre décrit le déroulement possible de ce premier examen, dans le cas où Franck répond à toutes les questions.



3. Deux stratégies rivalisent : répondre à la question 7 et s'en tenir là ou répondre à 9 questions dont trois à réponse inconnue.

Partie B : Franck passe un deuxième examen

Comme dans la partie précédente, il manque un point à Franck pour réussir son examen. Pour cela, il doit obtenir un nombre de réponses exactes strictement supérieur au nombre de réponses inexactes à celles des questions à réponse inconnue auxquelles il décide de répondre.

Reprendre des notations analogues à celles de la partie précédente.

Pour $1 \leq i \leq 26$, désignons par B_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse à la question numéro $24+i$ est exacte et zéro sinon. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Désignons par k le nombre de questions à réponse inconnue auxquelles Franck décide de répondre ($1 \leq k \leq 26$).

Désignons par X_k le nombre de réponses exactes obtenues par Franck parmi les k questions à réponse inconnue auxquelles il répond. C'est-à-dire que $X_k = \sum_{i=1}^{i=k} B_i$. Cette variable aléatoire suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

1. Nous devons comparer $P_{2k-1} = P\left(\left[X_{2k-1} \geq \frac{(2k-1)+1}{2}\right]\right)$ et $P_{2k} = P\left(\left[X_{2k} \geq \frac{2k+1}{2}\right]\right)$

2.
L'évènement $[X_{2k+1} \geq k+1]$ s'exprime comme une réunion d'évènements disjoints :
$[X_{2k+1} \geq k+1] = \bigcup_{i=k+1}^{i=2k+1} [X_{2k+1} = i]$.

3.
$P_{2k+1} = P\left(\left[X_{2k+1} \geq \frac{(2k+1)+1}{2}\right]\right) = P([X_{2k+1} \geq k+1])$.

De même : $P_{2k+3} = P\left(\left[X_{2k+3} \geq \frac{(2k+3)+1}{2}\right]\right) = P([X_{2k+3} \geq k+2])$

L'évènement $[X_{2k+1} \geq k+1]$ se décompose ainsi : $[X_{2k+1} \geq k+1] = [X_{2k+1} \geq k+2] \cup [X_{2k+1} = k+2]$

L'évènement $[X_{2k+3} \geq k+2]$ se décompose en une réunion de trois évènements disjoints :
$[X_{2k+1} \geq k+2] \cup ([X_{2k+1} = k+1] \cap ([B_{2k+2} = 1] \cup [B_{2k+3} = 1])) \cup ([X_{2k+1} = k] \cap ([B_{2k+2} = 1] \cap [B_{2k+3} = 1]))$

Problème 3 : Triangles entiers

Partie A : Quelques résultats préliminaires

2. Soit ABC un triangle du plan, isocèle de sommet A.

Le nombre $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB.AC} = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)\right|}{AB^2}$ s'exprime en fonction des coordonnées des points A, B, C dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$: $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)\right|}{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3. *Un lemme :*

« Soient a et b deux entiers ; l'entier b^2 divise a^2 si et seulement si b divise a. »
En effet, si b divise a alors il existe un entier q tel que $a = qb$. Alors : $a^2 = q^2 b^2$ et b^2 divise a^2

Réciproquement supposons que b^2 divise a^2 :
Pour tout nombre premier p divisant b, si p^β est le facteur premier relatif à p de la décomposition de b en produit de facteurs premiers et si p^α est le facteur premier relatif à p de la décomposition de a. $p^{2\beta}$ et $p^{2\alpha}$ sont ceux relatifs à p des décompositions de b^2 et de a^2 : il existe des entiers b' et a' dépourvus du facteur premier p tels que : $b^2 = p^{2\beta}.b'$; $a^2 = p^{2\alpha}.a'$

Sachant que b^2 divise a^2 : $p^{2\beta}$ divise $p^{2\alpha}.a'$ et étant premier avec a', il divise $p^{2\alpha}$.
Donc $2\beta \leq 2\alpha$ ce qui revient à dire que $\beta \leq \alpha$.

Les exposants de tous les facteurs premiers de la décomposition de b en produit de facteurs premiers sont inférieurs ou égaux aux exposants des mêmes facteurs de la décomposition de a en produit de facteurs premiers ; l'entier b divise a.

4.1. *Raisonnement par disjonction de cas*

Si x est un entier impair, de la forme $x = 2k + 1$, alors $x^2 = 1 + 4k + 4k^2 = 1 + 4k(k+1)$. Les entiers k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un des deux est un entier pair et le nombre $t = \dfrac{k(k+1)}{2}$ est un entier.

$x^2 = 1 + 8\dfrac{k(k+1)}{2} = 1 + 8t$.

….

4.2. *L'usage d'une congruence modulo 8 permet un raisonnement plus « léger ».*

Supposons qu'il existe quatre entiers non tous nuls tels que : $7a^2 = b^2 + c^2 + d^2$.

D'après la question précédente :

- Si a est un nombre impair, alors $7a^2 \equiv 7 \quad (8)$.
- Si a est un multiple de 4, alors $7a^2 \equiv 0 \quad (8)$
- Si a est de la forme $x = 2 + 4k$ alors $7a^2 \equiv 4 \quad (8)$

…

Partie B : Triangles de l'espace à sommets entiers

2.2. *Un lemme :*

« Soit N un entier strictement positif. Il existe r et k uniques tels que $\sqrt{N} = r\sqrt{k}$, r et k entiers et k sans facteur carré. »

En effet, considérons la décomposition de N en facteurs premiers.

On peut classer en deux catégories ces facteurs premiers : $p_1,\ p_2,\ldots,p_j$ sont les facteurs premiers affectés d'exposants impairs, $p_{j+1},\ldots,p_k$ ceux affectés d'exposants pairs : $N = p_1^{2\alpha_1+1}\ldots p_j^{2\alpha_j+1}p_{j+1}^{2\alpha_{1+1}}\ldots p_k^{2\alpha_k}$. (Si une des deux catégories est absente, le facteur correspondant dans ce produit est remplacé par 1).

Alors : $N = \left(p_1^{2\alpha_1}\ldots p_j^{2\alpha_j}p_{j+1}^{2\alpha_{1+1}}\ldots p_k^{2\alpha_k}\right)\times\left(p_1\ldots p_j\right) = \left(p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}\right)^2\times\left(p_1\ldots p_j\right)$ est le produit d'un carré et d'un entier sans facteur carré.

On obtient $\sqrt{N} = r\sqrt{k}$ avec $r = \left(p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}\right)$ et $k = p_1\ldots p_j$ produit de nombres premiers sans facteur carré.

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier assure de plus l'unicité de cette décomposition.

Et un corollaire :

« Soit un rationnel strictement positif. Sa racine carrée est le produit d'un rationnel et de la racine carrée d'un entier sans facteur entier. »

En effet, soit un nombre rationnel strictement positif $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Appliquons le résultat précédent aux entiers a et b : $\frac{a}{b} = \frac{(a')^2 k_1}{(b')^2 k_2} = \frac{(a')^2}{(k_2 b')^2}k_1 k_2$ où k_1 et k_2 sont sans facteurs carrés.

Puisque a et b sont premiers entre eux, leurs décompositions en facteurs premiers n'ont aucun facteur premier en commun, k_1 et k_2 sont aussi premiers entre eux et ces deux nombres n'ont pas non plus de facteur premier commun. Le produit $k_1\, k_2$ est un produit de facteurs premiers tous distincts, il est lui aussi sans facteur carré.

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{(a')^2 k_1\, k_2}{(b')^2 (k_2)^2} = \left(\dfrac{a'}{k_2 b'}\right)^2 \times (k_1\, k_2)$ est le produit du carré d'un rationnel et d'un entier sans facteur carré.

2.2. Pour les angles non droits de ABC (il y en a au moins deux, on supposera que ce sont ceux de sommets B et C), il existe des rationnels et des entiers uniques sans facteur carré (pas nécessairement les mêmes, ce sera à démontrer) tels que :

$\tan A\hat{B}C = r_B \sqrt{k_B}$; $\tan A\hat{C}B = r_C \sqrt{k_C}$ et éventuellement $\tan B\hat{A}C = r_A \sqrt{k_A}$.

2.3. Supposons que les angles de sommets B et C soient non droits.

Poser $\tan^2 A\hat{B}C = \dfrac{AH^2}{BH^2} = r_B{}^2 k$ et $\tan^2 A\hat{C}B = \dfrac{AH^2}{CH^2} = r_C{}^2 k$

Noter que : $AH^2 = k\ r_B{}^2\ BH^2 = k\, r_C{}^2 CH^2$.

Poser : $\begin{cases} b_1 = r_B\,(x_H - x_B) \\ b_2 = r_B\,(y_H - y_B) \\ b_3 = r_B\,(z_H - z_B) \end{cases}$ et $\begin{cases} u_1 = x_H - x_A \\ u_2 = y_H - y_A \\ u_3 = z_H - z_A \end{cases}$.

4.1. Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les côtés ont pour longueurs 3, 3, 2. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors : $AH^2 = AB^2 - \dfrac{BC^2}{4} = 8$.

L'angle de sommet B a pour tangente : $\tan A\hat{B}C = 2\sqrt{2}$ celui de sommet A a pour tangente $\dfrac{4\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1} = \dfrac{4}{7}\sqrt{2}$.

4.2. Soit ABC un triangle isocèle de sommet A dont les côtés ont pour longueurs 2, 2, 3. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors : $AH^2 = AB^2 - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{7}{4}$.

L'angle de sommet B a pour tangente : $\tan A\hat{B}C = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ celui de sommet A a pour tangente $\dfrac{\frac{2\sqrt{7}}{3}}{1 - \frac{7}{9}} = 3\sqrt{7}$.