Concours général 2017, problème 1 : parties de C de type *S*

Un ensemble « de type S » est un ensemble stable par multiplication et par somme de carrés.

1. Le sujet

Une partie A non vide de $\mathbf{C}$ (ensemble des nombres complexes) est dite de type S, si pour tout $(z_1\ ,\ z_2)\in A\times A$ le produit $z_1\,z_2$ et la somme des carrés $z_1{}^2+z_2{}^2$ sont encore dans A.

Dans tout le problème A désigne une partie de $\mathbf{C}$ de type S.

On note $b(A)$ le nombre de nombres complexes z de A dont le module est inférieur ou égal à 1.
On note $b(A)=\infty$ si ce nombre est infini.

Partie A : Quelques exemples simples

1. Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbf{C}$ de type S (on ne demande pas de le vérifier), préciser pour chacun d'eux la valeur de $b(A)$:
$A=\{0\}$; $A=\mathbf{C}$; $A=\mathbf{N}$; $A=\mathbf{N}^*$

2.1. Donner une partie A de type S telle que $b(A)=0$
2.2. Donner une partie A de type S telle que $b(A)=3$.

3. On note $\overline{A}=\{\overline{z},\ z\in A\}$ c'est-à-dire la partie de $\mathbf{C}$ constituée des nombres complexes conjugués des éléments de A. Montrer que $\overline{A}=\{\overline{z},\ z\in A\}$ est de type S et préciser $b(A)$

Partie B : Deux exemples de parties de **C** de type *S*

1. On définit le complexe j par $j=\mathbf{e}^{2i\pi/3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on note $\mathbf{Z}[j]=\{a+b\,j\},\ (a,\,b)\in\mathbf{Z}^2$, c'est-à-dire la partie de $\mathbf{C}$ constituée de tous les nombres complexes de la forme $a+b\,j$, avec $a\in\mathbf{Z}$ et $b\in\mathbf{Z}$.

1.1. Calculer $1+j+j^2$.
1.2. Justifier que $\mathbf{Z}[j]=\{a+b\,j\},\ (a,\,b)\in\mathbf{Z}^2$ est de type S.
1.3. Montrer que $b(\mathbf{Z}[j])=7$
1.4. (d) On note $\mathbf{Z}[j]^*=\mathbf{Z}[j]-\{0\}$ les éléments non nuls de $\mathbf{Z}[j]$. Justifier que $\mathbf{Z}[j]^*=\mathbf{Z}[j]-\{0\}$ est de type S et déterminer $b(\mathbf{Z}[j]^*)$

2. On définit la partie R de $\mathbf{C}$ par $\mathbf{R}=\{z\in\mathbf{C},\ z^2\in\mathbf{Z}[j]\}$.
Ainsi un nombre complexe z est dans R si et seulement si son carré est dans $\mathbf{Z}[j]$.
2.1. Montrer que R est de type S.
2.2. Déterminer $b(R)$.

Partie C : À la recherche des valeurs possibles de $b(A)$

1. On suppose qu'il existe $a \in A$ tel que $0 < |a| < 1$. Montrer que $b(A) = \infty$.

2. On considère, dans cette question, un nombre complexe a de module 1. On note arg(a) l'unique argument de a inclus dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ +\pi]$. On suppose de plus que arg(a) n'est ni un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$, ni un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$.

2.1. Montrer que si $\arg(a) \in \left]\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right[$, alors l'un des deux nombres complexes $a^2 + a^4$ ou $a^4 + a^8$ possède un module non nul et strictement inférieur à 1.

2.2. De même montrer que si $\arg(a) \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right[$, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$

2.3. Montrer que si $\arg(a) \in \left]-\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ 0\right[$, alors il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$

2.4. Conclure qu'il existe toujours $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $0 < \left|a^{2n} + a^{4n}\right| < 1$

3. On suppose, dans cette question, que $b(A)$ est fini et supérieur ou égal à 2.

3.1. Montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $|a| = 1$.

3.2. Quelles sont alors les valeurs possibles pour arg(a) ?

3.3. En déduire que $b(A) \leq 17$.

4. Donner une partie A de type S telle que $b(A) = 5$.

5. Donner une partie A de type S telle que $b(A) = 9$.

6. Quelles sont les valeurs possibles de $b(A)$?

2. Quelques pistes

Partie A : Quelques exemples simples

2. Considérer par exemple l'ensemble **Z** des entiers relatifs et l'ensemble des entiers non nuls pairs.

3. L'application conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ réalise une bijection de **C** sur lui même compatible avec le produit comme avec les sommes de carrés. Qu'en est-il pour les éléments de A ?

Partie B.

1.1. Les complexes $1, j, j^2$ étant les trois racines cubiques de l'unité : $1 + j + j^2 = 0$.

1.2. Si $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ alors :

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) j + b_1 b_2 j^2 = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) j + b_1 b_2 (-1 - j)$$

Procéder de manière analogue pour exprimer $z_1^2 + z_2^2$

1.3. Si $z = a + b\,j = \left(a - \dfrac{b}{2}\right) + \dfrac{b\sqrt{3}}{2} i$, alors $|z|^2 = \left(a - \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} = a^2 - a\,b + b^2$. Il s'agit de faire l'inventaire des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ dont le module est inférieur ou égal à 1.

Considérer l'expression : $m(a,b) = |z|^2 - 1 = a^2 - a\,b + b^2 - 1$ comme une expression du second degré en a, de discriminant $4 - 3b^2$ et discuter.

On doit obtenir sept éléments : 0 ; 1 ; -1 ; j ; $-j = \mathbf{e}^{-i\pi/3}$; $1 + j = -j^2 = \mathbf{e}^{i\pi/3}$; $-1 - j = j^2 = \mathbf{e}^{-2i\pi/3}$ comme le prévoyait l'énoncé.

En ce qui concerne $Z[j]^*$, ensemble des éléments non nuls de l'ensemble précédent :

Il faut essentiellement justifier que si $z_1 = a_1 + b_1 j$ et $z_2 = a_2 + b_2 j$ sont non nuls, alors $z_1^2 + z_2^2$ est lui aussi non nul, ce résultat n'est pas acquis.

On peut par exemple établir qu'il est impossible que z ; $i\,z$ *ou* $-i\,z$ appartiennent en même temps à $Z[j]^*$.

2. Les racines carrées des éléments des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1 sont par définition dans R et ont un module inférieur ou égal à 1 et réciproquement, si z est un élément de R de module inférieur ou égal à 1, son carré appartient à $\mathbf{Z}[j]$ et a un module inférieur ou égal à 1. En d'autres termes, on obtient les éléments de R de module inférieur ou égal à 1 en cherchant les racines carrées des éléments de $\mathbf{Z}[j]$ de module inférieur ou égal à 1.

En voici l'inventaire, il s'agit outre 0 des douze racines douzièmes de l'unité :

0 ; ± 1 ; $\pm i$; $\pm\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\pm\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$; $\pm\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$; $\pm\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$.

On peut remarquer au passage que, contrairement à $\mathbf{Z}[j]^*$, R^* n'est pas de type S. En effet, R^* contient i et contient 1, mais la somme de leurs carrés est nulle : $(i)^2+1^2=0$ donc n'est pas dans R^*. R^* n'est pas stable pour l'addition de deux carrés.

Partie C : À la recherche des valeurs possibles de $b(A)$

1. Montrer par récurrence que pour tout élément a d'un ensemble A de type S, la suite $\left(a^n\right)_{n\in N^*}$ des puissances de a d'exposant strictement positif est une suite d'éléments de S.

2. De façon générale pour tous réels u et v : $\left(\mathbf{e}^{iu}\right)^2+\left(\mathbf{e}^{iv}\right)^2=\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}=2\cos(u-v).\mathbf{e}^{i(u+v)}$ en vertu d'une identité remarquable portant sur la somme de deux complexes de module 1.

Ce complexe a pour module : $\left|\mathbf{e}^{2iu}+\mathbf{e}^{2iv}\right|=2\left|\cos(u-v)\right|$

2.1. Voir ce que cela donne lorsque $v=2u$ puis avec $2u$ et $4u$

2.2. Supposons que $0<u<\dfrac{\pi}{6}$. Soit n_0 le plus petit entier tel que : $\dfrac{\pi}{6}<n_0\,u$.

Alors $\dfrac{\pi}{6}<n_0\,u<(n_0+1)u<(n_0+2)u<_{gj2017}(n_0+3)u<\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$. Il y a au moins quatre multiples de u entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

2.3. Si un élément de A a un argument appartenant à $\left]-\dfrac{2\pi}{3}\,;0\right[$ son conjugué appartient à $\overline{A}$ et a un argument appartenant à $\left]0\,;\dfrac{2\pi}{3}\right[$.

2.4. Il reste à étudier le cas $\dfrac{2\pi}{3}<\arg(a)<\pi$ où $\arg(a)$ est un réel distinct de $\dfrac{5\pi}{6}$ et de $\dfrac{3\pi}{4}$ (le cas $-\dfrac{2\pi}{3}>_{gj}\arg(a)>-\pi$ s'y ramènera par conjugaison).

3.2 et 3.3. Les complexes de module 1 appartenant à A peuvent avoir pour argument les diverses exceptions signalées par l'énoncé.

On relève 17 exceptions.

4 et suivantes.

On pourra étudier l'ensemble $\mathbf{Z}[i]=\{a+b\,i\ ;\ (a,\ b)\in\mathbf{Z}^2\}$ ainsi que l'ensemble des nombres dont le carré appartient à $\mathbf{Z}[i]$.

Remarquer que ces ensembles lorsqu'ils sont étoilés (privés de zéro) ne sont plus de type *S*.

On aura ainsi au fil des questions déjà traitées fait le tour des ensembles de type *S* qui contiennent un complexe de module 1 et d'argument ou bien un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ ou bien un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$.

Il reste à voir ce qu'il se passe si un ensemble *A* de type *S* contient *en même temps* un complexe de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ et un autre de module 1 et d'argument un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$. Contient-il ou non dans ce cas un nombre complexe de module strictement inférieur à 1 ?

Examiner un ensemble de type *S* contenant à la fois $\mathbf{e}^{i\pi/4}$; $\mathbf{e}^{i\pi/3}$. Dans ce cas, il contient leurs puissances $\mathbf{e}^{i\,n\pi/4}$; $\mathbf{e}^{i\,m\pi/3}$ et les sommes des carrés de leurs puissances $\left(\mathbf{e}^{i\,n\pi/4}\right)^2+\left(\mathbf{e}^{i\,m\pi/3}\right)^2=\mathbf{e}^{i\,n\pi/2}+\mathbf{e}^{i\,2m\pi/3}=2\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{m\pi}{3}\right)\mathbf{e}^{i(n\pi/4)+m\pi/3}$.

Or $\dfrac{n\pi}{4}-\dfrac{m\pi}{3}=(3n-4m)\dfrac{\pi}{12}$. Examiner si on peut choisir *m* et *n* de sorte que $\left|\cos(3n-4m)\dfrac{\pi}{12}\right|<\dfrac{1}{2}$ (peut-on par exemple faire en sorte que $\cos(3n-4m)\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{5\pi}{12}$?)

Pour aller plus loin

Pourquoi l'énoncé excepte-t-il d'emblée les complexes d'argument un multiple de $\frac{\pi}{4}$ ou un multiple de $\frac{\pi}{6}$?
D'où viennent ces exceptions ?

Soit $z = \mathbf{e}^{i\theta}$ un complexe de module 1 appartenant à un ensemble *A* de type *S*.
(Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\theta \in [0\ ;\ \pi]$, quitte éventuellement à considérer le conjugué de *z* et l'ensemble $\overline{A}$)

Alors, *A* contient toutes les puissances de ce nombre et la somme des carrés de deux puissances de ce nombre.

En particulier, pour tout entier *n* strictement positif, *A* contient : $z_n = \left(z^n\right)^2 + \left(z^{2n}\right)^2 = \mathbf{e}^{2i\,n\theta} + \mathbf{e}^{4i\,n\theta}$

Or : $_{gj}$ $z_n = 2\cos(n\theta)\mathbf{e}^{3i\,n\theta}$ et $|z_n| = 2|\cos(n\theta)|$. Voyons dans quel cas on peut obtenir un complexe de module strictement compris entre 0 et 1 :
$0 < |z_n| < 1 \Leftrightarrow 0 < |\cos(n\theta)| < \frac{1}{2}$. Pour cela, z_n doit avoir un argument situé dans l'ensemble : $\left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right[$

Les arguments de z_n sont les nombres de la forme : $n\theta + k\,2\pi = 2\pi\left(n\frac{\theta}{2\pi} + k\right)$ où *k* est entier relatif.

Celui des arguments qui est entre 0 et 2π est le nombre $2\pi\left(n\frac{\theta}{2\pi} - E\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right)\right)$ où *E* désigne la partie entière.

$$2\pi\left(n\frac{\theta}{2\pi} - E\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \in \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right[_{gjulia} \Leftrightarrow n\frac{\theta}{2\pi} - E\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right) \in \left]\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3}\right[$$

On va examiner, θ étant donné, s'il est possible ou non de trouver un entier *n* tel que $n\frac{\theta}{2\pi} - E\left(n\frac{\theta}{2\pi}\right) \in \left]\frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{3}\right[$

Premier cas. Supposons que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}$ avec *p* et *q* premiers entre eux (c'est-à-dire soit un rationnel).

Alors : $n \times \frac{\theta}{2\pi} = n \times \frac{p}{q} = \frac{n \times p}{q}$. Puisque *p* et *q* sont premiers entre eux, il existe des entiers *v* et *w* tels que : $v \times p + w \times q = 1$ et $v \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1 - w \times q}{q} = \frac{1}{q} - w$. On en conclut que $v \times \frac{\theta}{2\pi} \equiv \frac{1}{q} \mod 1$ puis que $m\,v \times \frac{\theta}{2\pi} \equiv \frac{m}{q} \mod 1$
Dans ce cas, en faisant varier l'entier *n* en tant que multiple de *v* ($n = v,\ 2v,\ 3v,\ \ldots$) on peut obtenir :

$n\dfrac{\theta}{2\pi}-E\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)=0\ ;\ \dfrac{1}{q}\ ;\ \dfrac{2}{q}\ ;\ \dfrac{3}{q}\ ;\ldots;\ \dfrac{q-1}{q}$.

La suite $\left(n\dfrac{\theta}{2\pi}-E\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)\right)_{n\in N^*}$ prend un nombre fini de valeurs.

- Lorsque $q>12$, alors on obtient toujours au moins un nombre parmi les $\dfrac{1}{q}\ ;\ \dfrac{2}{q}\ ;\ \dfrac{3}{q}\ ;\ldots$ dans $\left]\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$ (même deux, au moins un dans chaque intervalle puisque $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}>\dfrac{1}{q}$).
- Lorsque $5\leq q<12$ et q premier avec 2 et avec 3, on obtient toujours au moins un nombre parmi les $\dfrac{1}{q}\ ;\ \dfrac{2}{q}\ ;\ \dfrac{3}{q}\ ;\ldots$ dans $\left]\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$ (vérifier).
- Lorsque $q=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$, on n'en obtient pas (cas que l'on peut résumer en disant que θ est un multiple de $\dfrac{\pi}{4}$ ou un multiple de $\dfrac{\pi}{6}$). Il s'agit d'un cas d'exception.

Deuxième cas . Supposons que $\dfrac{\theta}{2\pi}$ soit un nombre irrationnel. Alors, la suite $\left(n\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right)-E\left(n\dfrac{\theta}{2\pi}\right)\right)_{n\in N^*}$ est une suite dense[1] dans $]0,\ 1[$, il existe une infinité de termes de cette suite dans $\left]\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$.

Finalement, les cas d'exception où il est impossible de trouver un entier n tel que $n\dfrac{\theta}{2\pi}-E\left(n\dfrac{\theta}{2\pi}\right)\in\left]\dfrac{1}{6}\ ;\ \dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{1}{4}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right[$ se résument aux cas où $\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{p}{q}$ avec $q=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12$.

[1] On pourra trouver une démonstration de ce résultat au fil du problème sur le thème « fractions continues ». Ce problème figure dans la page consacrée à l'écrit du CAPES.