# Concours Général 2017 série ES. Eléments de correction

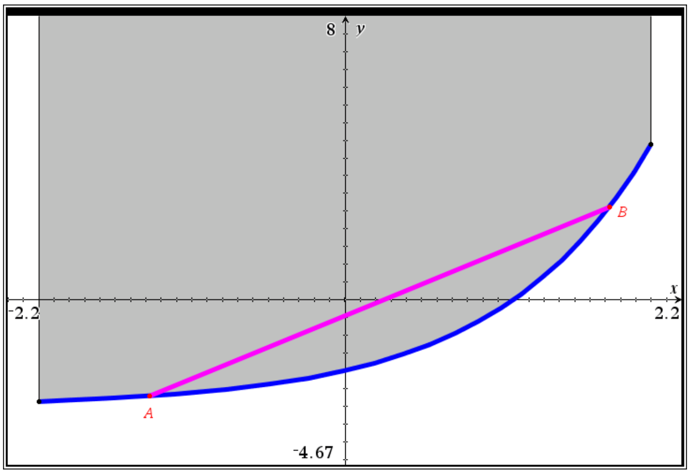
## Problème 1 : Fonctions de type C

*Ce problème met en scène des fonctions dites « de type C ». La lettre C n'est pas choisie au hasard : la propriété sous-jacente est la propriété de* ***convexité****.*

*Cette notion de convexité figure au programme des classes ES et L spécialité :*
*« Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite convexe sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. »*

*Nous en verrons ici une autre caractérisation et quelques propriétés.*

*La courbe représentative d'une fonction convexe est située au dessous de ses cordes, propriété justifiée dans la question* ***3****. La figure ci-contre illustre cette situation : on a tracé la courbe représentative d'une fonction convexe. Toute corde [AB] joignant deux points quelconques de cette courbe est incluse dans la zone grisée et située au dessus de la courbe.*




**1.1.** La fonction $h$ est une fonction affine sur $[0,\ 1]$ définie par : $h(t)=(a-b)t+b$. Compte tenu de l'hypothèse $a<b$, le coefficient de son terme du premier degré est strictement négatif. Cette fonction est strictement décroissante $_{gj}$ sur $[0,\ 1]$, elle décroît de $h(0)=b$ à $h(1)=a$

NB. Etant *strictement monotone* et *continue* sur $[0,\ 1]$, la fonction $h$ réalise une bijection de $[0,\ 1]$ sur l'intervalle image $[h(0), h(1)]=[a, b]$. Tout réel $x$ de $[a, b]$ admet dans $[0,\ 1]$ un antécédent et un seul par $h$. Mais le théorème sous-jacent n'est pas explicitement au programme : « *La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement ; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.* »

La confection d'un tel tableau de variation « avec une flèche oblique » est une réponse satisfaisante à la question.

**1.2.** L'existence et l'unicité du réel $t$ sont garanties par la remarque précédente.

Cependant, en exprimant inversement $t$ en fonction de $x$ à partir de la relation $h(t)=x$, on obtient l'équivalence :

$$h(t)=x \Leftrightarrow t=\frac{b-x}{b-a}$$

Le réel $x$ appartenant à $[a, b]$, il vérifie la double inégalité $a \le x \le b$, ce qui implique $b-a \ge b-x \ge 0$ et, puisque $b-a$ est un réel strictement positif : $1=\frac{b-a}{b-a} \ge t=\frac{b-x}{b-a} \ge 0$.

Le réel $t=\frac{b-x}{b-a}$ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Il existe ainsi un unique réel de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $h(t)=x$, c'est le réel $t=\frac{b-x}{b-a}$

**1.3.** Sous l'hypothèse $a>b$, le coefficient du terme du premier degré de $h(t)=(a-b)t+b$ est strictement positif. La fonction $h$ est strictement croissante sur $[0, 1]$, elle croît de $h(0)=b$ à $h(1)=a$.

La fonction $h$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur l'intervalle $[b, a]$.

On écrira de préférence (mais ce n'est pas une obligation) : $h(t)=x \Leftrightarrow t=\frac{x-b}{a-b}$.

Le réel $x$ appartenant à $[b, a]$, il vérifie la double inégalité $a \ge x \ge b$, ce qui implique $a-b \ge x-b \ge 0$ et, puisque $a-b$ est un réel strictement positif : $1=\frac{a-b}{a-b} \ge t=\frac{x-b}{a-b} \ge 0$.

Il existe ainsi un unique réel de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $h(t)=x$, c'est le réel $t=\frac{x-b}{a-b}$

**2.1.** Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(b-a,\ f(b)-f(a))$. C'est un vecteur non nul puisque $a$ et $b$ sont deux réels distincts. Il est directeur de la droite $\Delta$.

Soit $M\ (x, y)$ un point du plan. Ce point $M$ appartient à la droite $\Delta$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}\ (x-a,\ y-f(a))$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=0$

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=\begin{vmatrix} b-a & x-a \\ f(b)-f(a) & y-f(a) \end{vmatrix}=(b-a)(y-f(a))-(x-a)(f(b)-f(a))$$

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)=0 \Leftrightarrow (b-a)(y-f(a))-(x-a)(f(b)-f(a))=0$$

Une équation cartésienne de la droite $\Delta$ est : $(b-a)(y-f(a))-(x-a)(f(b)-f(a))=0$

Une équation équivalente, puisque $b-a \neq 0$, est : $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Une autre équation équivalente est : $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\dfrac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}$

Chacune des trois est une équation de la droite ($AB$), laquelle n'a pas une unique équation.

La troisième équation est *l'équation réduite* de cette droite (mise sous une forme canonique type $y=mx+p$).
On y reconnaît le coefficient directeur $m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et « l'ordonnée à l'origine » $p=\dfrac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}$.
C'est l'équation que l'énoncé semblait attendre.

Cependant la deuxième équation, à savoir $y-f(a)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ met davantage en évidence que la droite en question passe par le point $A$. Elle peut avoir ses adeptes.

**2.2.** Le point $P(t)$ étant le point de $\Delta$ d'abscisse $t\,a+(1-t)b$, son ordonnée est :

$$y_{P(t)}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}((t\,a+(1-t)b)-a)+f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}((b-a)(1-t))+f(a)=(f(b)-f(a))(1-t)+f(a)$$

soit : $y_{P(t)}=t\,f(a)+(1-t)\,f(b)$ conformément aux attentes de l'énoncé.

On remarque que l'abscisse de $P(t)$ est égale à $h(t)$. Lorsque $t$ décrit l'intervalle $[0,1]$, $h(t)$ décrit l'intervalle $[a,b]$ et $P(t)$ décrit le segment [$AB$], c'est-à-dire, relativement à la courbe représentative de la fonction *f*, la corde joignant les points $A$ et $B$ de cette courbe.

**3.** Soit [$AB$] une corde joignant les points $A$ et $B$ d'abscisses respectives (distinctes) $a$ et $b$ de la courbe représentative de la fonction *f*.

Pour tout réel $t$ de $[0,1]$, soient $M(t)$ et $P(t)$ les points de même abscisse $h(t)$ situés respectivement sur la courbe représentative de la fonction $f$ et sur la corde $[AB]$. Le point $M(t)$ a pour ordonnée $y_{M(t)} = f(h(t))$, tandis que $P(t)$ a pour ordonnée $y_{P(t)} = t\,f(a) + (1-t)\,f(b)$.

L'inégalité $f(ta + (1-t)b) \leq t\,f(a) + (1-t)\,f(b)$ vérifiée quels que soient $a$ et $b$ de $I$ et quel que soit $t$ de $[0,1]$ (« inégalité de convexité ») caractérise les fonctions de type C sur $I$. Si $f$ est une fonction de type C, pour tout réel $t$ de $[0,1]$, $y_{M(t)} \leq y_{P(t)}$ c'est-à-dire que le point $M(t)$, situé sur la courbe représentative de la fonction $f$, est au dessous du point $P(t)$ de même abscisse situé sur la corde $[AB]$. Et cela, quelle que soit la corde considérée.

C'est en ce sens que la courbe représentative de la fonction $f$ est « au dessous de ses cordes ». Nous voyons ici une autre caractérisation de la notion de convexité.

**4.1.** La réponse est oui, d'après l'inégalité triangulaire vérifiée par les valeurs absolues :
Quels que soient les réels distincts $a$ et $b$ et quel que soit $t$ de $[0,1]$ : $|ta + (1-t)b| \leq |ta| + |(1-t)b| = t|a| + (1-t)|b|$

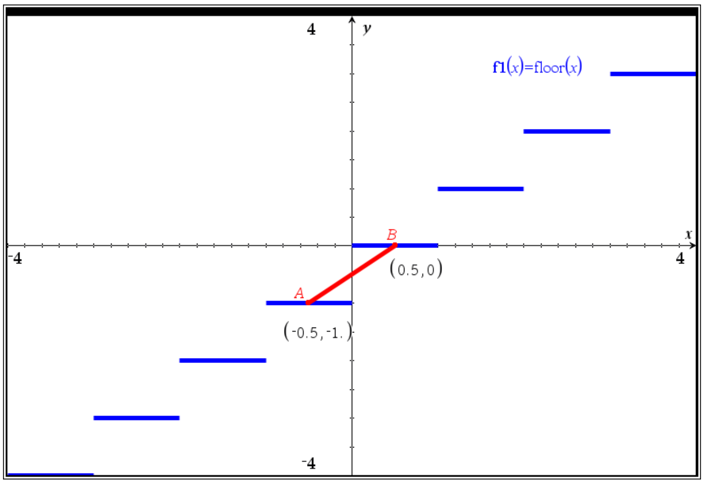
**4.2.** Quels que soient les réels distincts $a$ et $b$ et quel que soit $t$ de $[0,1]$ :
$(ta + (1-t)b)^2 = t^2a^2 + 2t(1-t)ab + (1-t)^2 b^2$
Or : $(ta + (1-t)b)^2 - (ta^2 + (1-t)b^2) = -t(1-t)(b-a)^2$

Cette différence est négative ou nulle quel que soit $t$ de $[0,1]$, nulle si $t=0$ ou si $t=1$, strictement négative sinon.

Quels que soient les réels distincts $a$ et $b$ et quel que soit $t$ de $[0,1]$ : $(ta + (1-t)b)^2 \leq ta^2 + (1-t)b^2$ : La fonction carrée est de type C.

**4.3.** La fonction partie entière est de type C sur l'intervalle $[0,1]$ (sa courbe représentative y coïncide avec ses cordes), mais en revanche elle ne l'est pas sur l'intervalle $[-2,2]$.

Voici sur la copie d'écran le contre exemple d'une corde qui n'est pas au dessus de la courbe : par exemple le milieu de cette corde est le point de coordonnées $(0\,;-0{,}5)$ alors que le point de même abscisse situé sur la courbe représentative de la fonction partie entière est l'origine du repère, au dessus de la corde.



**5.1.** La fonction définie sur $[0,1]$ par : $t \mapsto f(ta+(1-t)b) = f(h(t))$ est la composée de la fonction affine *h*, qui applique l'intervalle $[0,1]$ sur l'intervalle $[a,b]$, par la fonction *f*.

Une fonction affine étant indéfiniment dérivable, et *f* étant deux fois dérivable sur *I*, intervalle qui contient $[a,b]$, cette composée est aussi deux fois dérivable sur $[0,1]$. La fonction $\varphi$ est la somme de cette composée deux fois dérivable et d'une fonction affine indéfiniment dérivable, elle est deux fois dérivable.

On note que la dérivée de la fonction *h* est la fonction constante : $h'(t) = a-b$.
La dérivée de la fonction $t \mapsto f(ta+(1-t)b) = f(h(t))$ est de ce fait la fonction $t \mapsto (a-b)f'(h(t))$

Quel que soit *t* appartenant à $[0,1]$ : $\varphi'(t) = f(a) - f(b) - (a-b)f'(h(t))$ et $\varphi''(t) = -(a-b)^2 f''(h(t))$
La dérivée seconde de la fonction $\varphi$ est du signe opposé à celui de la dérivée seconde de la fonction *f*. Cette dernière étant supposée positive sur *I*, la dérivée seconde de la fonction $\varphi$ est négative sur $[0,1]$.

**5.2.** La fonction dérivée première $\varphi'$ ayant une dérivée négative sur $[0,1]$ est décroissante sur $[0,1]$.

**5.3.** $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. La fonction $\varphi$ prenant une même valeur aux extrémités de l'intervalle $[0,1]$, elle n'est ni strictement croissante sur $[0,1]$ ni strictement décroissante sur $[0,1]$. Or, une fonction ayant une dérivée strictement positive sur $[0,1]$ est strictement croissante sur $[0,1]$ ; une fonction ayant une dérivée strictement négative sur $[0,1]$ est strictement décroissante sur $[0,1]$. La fonction $\varphi$ a une dérivée ni strictement positive ni strictement négative.
Si $\varphi$ n'est pas une fonction constante (auquel cas sa dérivée est identiquement nulle), sa dérivée est une fonction qui change de signe. Puisque cette fonction dérivée est décroissante, elle est d'abord positive puis négative.

Il existe alors un réel *c* de $]0,1[$ tel que $\varphi'$ est positive sur $[0,c]$ et négative sur $[c,1]$. La fonction $\varphi$ est croissante sur $[0,c]$ et décroissante sur $[c,1]$. Elle admet un maximum en *c*, nécessairement positif.

**5.4.** $\varphi$ étant croissante sur $[0,c]$ et prenant la valeur zéro en zéro, $\varphi$ est positive sur $[0,c]$.
$\varphi$ étant décroissante sur $[c,1]$ et prenant la valeur zéro au point 1, $\varphi$ est positive sur $[c,1]$.

Cette fonction est finalement positive sur la totalité de l'intervalle $[0,1]$ : quels que soient *a* et *b* de *I* et quel que soit *t* de $[0,1]$, $t\,f(a) + (1-t)f(b) - f(ta+(1-t)b) \geq 0$ c'est-à-dire $t\,f(a) + (1-t)f(b) \geq f(ta+(1-t)b)$.

Il s'agit là du critère de convexité évoqué en question **3**, *f* est une fonction de type C.

Enonçons un théorème : « **Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur un intervalle *I*. Si la dérivée seconde de *f* est une fonction positive sur *I*, alors *f* est une fonction convexe** ».

**6.1.** La fonction $x \mapsto -\ln x$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ a pour dérivée première la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et pour dérivée seconde la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, strictement positive sur $]0,+\infty[$. D'après le théorème précédent, la fonction $x \mapsto -\ln x$ est une fonction de type C sur $]0,+\infty[$.

Quels que soient $a$ et $b$ de $]0,\ +\infty[$ et quel que soit $t$ de $[0,1]$, $t\ \ln a + (1-t)\ln b - \ln(t\,a + (1-t)b) \geq 0$

**6.2.** Soient $x, y, z$ trois réels strictement positifs.

En appliquant une première fois l'inégalité de convexité à la fonction $x \mapsto -\ln x$ avec $a = \dfrac{x+y}{2}$ ; $b = z$ ; $t = \dfrac{2}{3}$, on obtient l'inégalité : $-\dfrac{2}{3}\ln\dfrac{x+y}{2} - \dfrac{1}{3}\ln z + \ln\left(\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \dfrac{1}{3}z\right) \geq 0$ , c'est-à-dire : $\ln\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq \dfrac{2}{3}\ln\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{1}{3}\ln z$ .

En l'appliquant une deuxième fois avec $a = x$ ; $b = y$ ; $t = \dfrac{1}{2}$ , on obtient l'inégalité : $-\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\ln y + \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq 0$ c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln y$

De cette inégalité on déduit que $\dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{1}{3}\ln x + \dfrac{1}{3}\ln y$ .

Ainsi quels que soient $x, y, z$ strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\ln\frac{x+y}{2} + \frac{1}{3}\ln z \geq \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln y + \frac{1}{3}\ln z = \frac{\ln x + \ln y + \ln z}{3}$$

Compte tenu des propriétés de la fonction logarithme : $\dfrac{\ln x + \ln y + \ln z}{3} = \ln\left((x\,y\,z)^{1/3}\right)$

L'inégalité précédente s'écrit : $\ln\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right) \geq \ln\left((x\,y\,z)^{1/3}\right)$

Composons chacun des deux membres de cette inégalité par la fonction exponentielle, fonction réciproque de la fonction logarithme. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur **R** conserve le sens des inégalités :

$$\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \ln\left((x\,y\,z)^{1/3}\right) \ \Rightarrow\ \exp\left(\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right) \geq \exp\left(\ln\left((x\,y\,z)^{1/3}\right)\right)$$

Autrement dit : $\dfrac{x+y+z}{3} \geq (x\,y\,z)^{1/3}$

NB. Le premier membre représente la moyenne arithmétique des trois réels $x, y, z$ tandis que le deuxième membre représente la moyenne géométrique de ces trois réels.

Dans le même ordre d'idées, l'inégalité $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{2}\ln y$ qu'on a eu l'occasion d'utiliser s'écrit $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \ln\sqrt{x\,y}$ et implique l'inégalité $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{x\,y}$ : la moyenne arithmétique $\dfrac{x+y}{2}$ des deux réels strictement positifs $x$ et $y$ est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique $\sqrt{x\,y}$ .

## Problème 2 : Etude d'une suite

*Ce problème mériterait d'être intitulé « Etude d'une célèbre suite ». Il s'agit en effet d'étudier une « suite de Fibonacci », type de suite connu au moins depuis le début du XIII$^{ème}$ siècle. Chaque terme d'une telle suite est la somme des deux termes précédents.*

*Ce type de suite intervient dans un grand nombre de situations. On va voir que cette suite à un rapport étroit avec la « divine proportion », nombre irrationnel qui, depuis le Moyen Âge, bénéficie lui aussi d'une certaine notoriété.*

### Partie A

**1.** L'équation (E) a pour solutions : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (réel strictement positif) et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (réel strictement négatif).

**2.** Les deux nombres $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les deux racines du polynôme : $P(x) = x^2 - x - 1$.

On rappelle que, étant donné un polynôme du second degré $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ possédant deux racines, le produit des deux racines est égal au quotient $\dfrac{c}{a}$ tandis que la somme des deux racines est égale à $-\dfrac{b}{a}$.

En l'occurrence le produit $\alpha \times \beta$ des deux racines est égal à $-1$ tandis la somme $\alpha + \beta$ est égale à 1.

En conséquence : $\beta = -\dfrac{1}{\alpha} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} 1 - \alpha$

Le nombre $\alpha$ est appelé « divine proportion » ou aussi *nombre d'or*.

Une calculatrice indique que $1{,}61 < \alpha < 1{,}62$ et que $-0{,}62 < \beta < -0{,}61$

## Partie B

**1.1.** $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**1.2.** La matrice *A* est nécessairement une matrice 2x2, pour rendre compatible la relation de l'énoncé.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors : $A X_n = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} \begin{pmatrix} a u_n + b u_{n+1} \\ b u_n + c u_{n+1} \end{pmatrix}$

La relation $\begin{pmatrix} a u_n + b u_{n+1} \\ b u_n + d u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ s'écrit, en raison de la relation de récurrence entre les termes de la suite : $\begin{pmatrix} a u_n + b u_{n+1} \\ b u_n + d u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Cette relation étant vérifiée universellement (i.e. quel que soit l'entier *n*), les deux colonnes doivent être *identiques*.

Par identification$_{gj}$ : $a = 0 \;\; b = 1\,; c = 1\,; d = 1$. La matrice *A* est la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**1.3.** Pour tout entier *n* strictement positif : $X_n = A^n X_0$. En convenant[1] que $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la relation $X_n = A^n X_0$ est aussi vérifiée au rang zéro.

**2.** En tant que solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, les deux réels $\alpha$ et $\beta$ vérifient les relations : $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$, relations que l'on va utiliser.

$$AC_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

De même : $AC_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} \begin{pmatrix} \beta \\ 1+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$

Ainsi, $AC_1 = \alpha C_1$ et $AC_2 = \beta C_2$

*L'action de la matrice A sur ces vecteurs colonnes les transforme en des vecteurs qui leur sont proportionnels.*

[1] Conventionnellement, la puissance zéro d'une matrice carrée $n \times n$ est la matrice unité $I_n$ de format $n \times n$.

**3.** La matrice $P$ est la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$. Son déterminant est : $\det P=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}=\beta-\alpha=-\sqrt{5}$ .
La matrice $P$ a un déterminant non nul, elle est inversible.

**4.1.** Simple conséquence mécanique du produit LICO (lignes par colonnes) de deux matrices 2x2.

**4.2.** Par définition de la matrice inverse d'une matrice inversible, $P^{-1}P$ est la matrice unité $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$**.**

D'après la remarque **4.1**, les colonnes $P^{-1}C_1$ et $P^{-1}C_2$ sont, respectivement, égales à $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

**4.3.** Les colonnes de $AP$ sont les colonnes $AC_1=\alpha C_1$ et $AC_2=\beta C_2$.

Par associativité : $P^{-1}AP=P^{-1}(AP)$. Les colonnes de $P^{-1}AP$ sont respectivement $P^{-1}(\alpha C_1)$ et $P^{-1}(\beta C_2)$.
Par linéarité : $P^{-1}(\alpha C_1)=\alpha\left(P^{-1}C_1\right)$ et $P^{-1}(\beta C_1)=\beta\left(P^{-1}C_2\right)$

Les colonnes de $P^{-1}AP$ sont donc, respectivement, $\alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}$ et $\beta\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix}$.

Cela revient à dire que : $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$, il s'agit d'une matrice « diagonale », la matrice $D$ de la question qui suit.

**5.1.** Proposons-nous de démontrer par récurrence que pour tout entier $n\in\mathbf{N}$, $D^n=\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$

Cette expression de la puissance $n$ de $D$ est en effet exacte :

- Au rang zéro conventionnellement : $D^0=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- Au rang 1 par définition de la matrice $D$ : $D^1=D=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$
- En outre des calculs simples montreraient que $D^2=D\times D=\begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \beta^2\end{pmatrix}$, et, si besoin est, que $D^3=D\times D^2=\begin{pmatrix}\alpha^3 & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix}$

Il y a tout lieu de penser que la formule $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ perdure au-delà du rang 3 mais il faut le justifier, par exemple par un raisonnement par récurrence.

Supposons que, pour un entier naturel $n$, $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

La puissance suivante de $D$ est : $D^{n+1} = D\,D^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{n+1} \end{pmatrix}$.

La formule conjecturée $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ est donc héréditaire : si elle est exacte à un rang $n$, elle est encore exacte au rang suivant $n+1$.

Etant initialisée dès le rang zéro, comme nous l'avons vu ci-dessus, et étant héréditaire, cette formule est exacte pour tout entier naturel $n$.

L'expression de la puissance $n$ $_{gj}$ de la matrice $D$ est pour tout entier naturel $n$ : $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

**5.2.** Sachant que $D = P^{-1}AP$, inversement, $PDP^{-1} = A$ .
En effet par associativité du produit matriciel: $PDP^{-1} = P\left(P^{-1}AP\right)P^{-1} = \left(PP^{-1}\right)A\left(PP^{-1}\right) = I_2\,A\,I_2 = A$

Pour tout entier $n$ strictement positif : $A^n = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)...\left(PDP^{-1}\right)$ ($n$ facteurs)

Par associativité du produit matriciel : $A^n = PD\left(PP^{-1}\right)D\left(PP^{-1}\right)...\left(PP^{-1}\right)\left(DP^{-1}\right)$

Ce produit est formé de $n$ facteurs égaux à $D$, et chaque facteur $PP^{-1}$ est égal à la matrice unité. On obtient : $A^n = PD^nP^{-1}$

Ne connaissant pas l'expression de $P^{-1}$, il faut trouver un moyen de s'en passer …

De $A^n = PD^nP^{-1}$ on déduit, en multipliant à droite par la matrice $P$ : $A^nP = PD^nP^{-1}P$

Autrement dit : $A^nP = PD^n$ $_{gj}$ où $P$ est, rappelons-le, la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

On cherche à calculer la matrice $A^n$.

Pour cela, on va poser : $A^n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}$ (les coefficients de cette matrice dépendent de l'entier $n$ c'est pourquoi on choisit une notation indicielle ; elle n'est pas obligatoire).

Un calcul matriciel montre que : $A^n\,P \underset{\text{gilbertjulia}}{=} \begin{pmatrix} a_n + \alpha c_n & a_n + \beta c_n \\ b_n + \alpha d_n & b_n + \beta d_n \end{pmatrix}$ et que $P\,D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \end{pmatrix}$

De l'égalité $A^n\,P = P\,D^n$ et des expressions respectives des deux matrices, on déduit, en identifiant deux à deux leurs coefficients respectifs, deux systèmes d'équations à deux inconnues l'un d'inconnues les coefficients $a_n, c_n$ et l'autre d'inconnues les coefficients $b_n, d_n$ :

$$\begin{cases} a_n + \alpha c_n = \alpha^n \\ a_n + \beta c_n = \beta^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_n + \alpha d_n = \alpha^{n+1} \\ b_n + \beta d_n = \beta^{n+1} \end{cases}$$

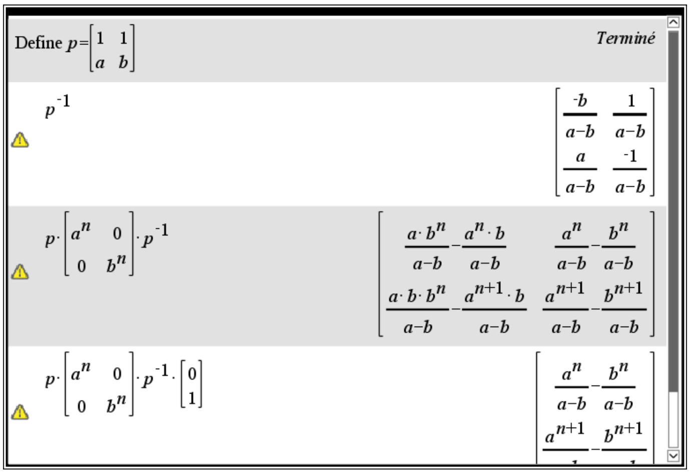
Le premier a pour solutions : $\begin{cases} c_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ a_n = \dfrac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta} \end{cases}$ et le deuxième : $\begin{cases} d_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ b_n = \dfrac{\alpha\beta^{n+1} - \beta\alpha^{n+1}}{\alpha - \beta} \end{cases}$

Finalement : $A^n = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha\beta^n - \beta\alpha^n & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha\beta^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} & \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$

$$X_n = A^n\,X_0 = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} \frac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$$

## Commentaire sur la partie B

Le calcul de la matrice inverse de $P$ aurait pu être délégué à un logiciel de calcul formel.

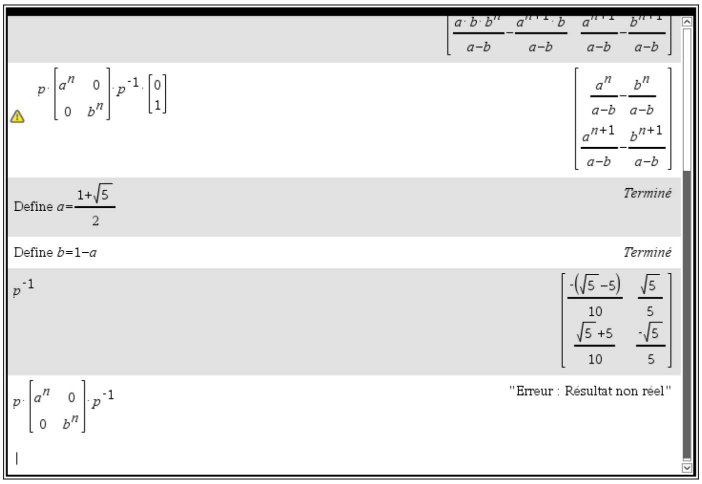



On reconnaît ci-contre l'expression de cette matrice :

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

Encore faut-il disposer d'un bon logiciel de calcul formel. Certainement par souci d'équité, le concepteur du sujet a proposé une très intéressante démarche évitant cet écueil.

Le lecteur pourra aussi reconnaître la matrice $A^n = P\,D^n P^{-1}$ ainsi que le vecteur colonne $X_n$.




Remplacer trop tôt les lettres $a$ et $b$ par leurs valeurs numériques n'est pas forcément une bonne idée.

Le logiciel nous donne certes l'expression de $P^{-1}$ , expression qui n'a plus rien de bien significatif, et délivre un message d'erreur si l'on veut calculer la matrice $A^n$.

## Partie C

**1.** L'énoncé fournissant le résultat à démontrer, procédons à une vérification. Considérons l'expression $v_{n+1} - \beta v_n$ et tentons d'établir que cette différence est nulle pour toute valeur de *n*.

Pour tout entier naturel *n* : $v_{n+1} - \beta v_n = \left(u_{n+2} - \alpha u_{n+1}\right) - \beta\left(u_{n+1} - \alpha u_n\right)$.

Compte tenu de la relation de récurrence liant les termes de la suite $\left(u_n\right)$, $u_{n+2}$ est la somme des deux termes qui le précèdent : $v_{n+1} - \beta v_n = \left(\left(u_{n+1} + u_n\right) - \alpha u_{n+1}\right) - \beta\left(u_{n+1} - \alpha u_n\right) = (1 - \alpha - \beta)u_{n+1} + (1 + \alpha\beta)u_n$

D'après les résultats de la partie **A**, $\alpha$ et $\beta$ ont pour somme 1 et pour produit $-1$. Autrement dit : $1 - \alpha - \beta = 1 + \alpha\beta = 0$.

Pour cette raison : $v_{n+1} - \beta v_n = (1 - \alpha - \beta)u_{n+1} + (1 + \alpha\beta)u_n = 0$ pour toute valeur de *n*.

De façon analogue, les deux nombres $\alpha$ et $\beta$ jouant des rôles symétriques, intéressons-nous à l'expression $w_{n+1} - \alpha w_n$.

Pour tout entier naturel *n* :
$w_{n+1} - \alpha w_n = \left(u_{n+2} - \beta u_{n+1}\right) - \alpha\left(u_{n+1} - \beta u_n\right) = \left(u_{n+1} + u_n - \beta u_{n+1}\right) - \alpha\left(u_{n+1} - \beta u_n\right) = (1 - \alpha - \beta)u_{n+1} + (1 + \alpha\beta)u_n$

Pour la même raison que précédemment : $w_{n+1} - \alpha w_n = 0$ pour toute valeur de *n*.

Pour tout entier naturel *n* : $\begin{cases} v_{n+1} = \beta v_n \\ w_{n+1} = \alpha w_n \end{cases}$. Les deux suites $\left(v_n\right)$ et $\left(w_n\right)$ sont des ***suites géométriques***.

La première est la suite géométrique de raison $\beta$ et de premier terme $v_0 = u_1 - \alpha u_0 = 1$.

La deuxième est la suite géométrique de raison $\alpha$ et de premier terme $w_0 = u_1 - \beta u_0 = 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir explicitement chacune des deux suites :

Pour tout entier naturel *n*, $v_n = v_0\,\beta^n = \beta^n$ et $w_n = w_0\,\alpha^n = \alpha^n$

Ces deux suites sont exactement les suites des puissances des nombres $\alpha$ et $\beta$ respectivement.

## Partie D

**1.** *Si on utilise la partie B* :

Une expression de $u_n$ figure en première ligne du vecteur colonne $X_n = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$, puisque par définition $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. L'expression recherchée est : $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

Une expression équivalente, en fonction uniquement du nombre d'or est : gjulia $u_n = \dfrac{\alpha^n - \left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)^n}{\alpha + \dfrac{1}{\alpha}}$

Il est inutile de remplacer $\alpha$ et $\beta$ par leurs valeurs numériques, l'expression de $u_n$, bardée de racines carrées de 5, n'est pas plus significative.

Pour l'anecdote : $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

*Si on utilise la partie C* :

Il s'agit d'exploiter les formules explicites : $\begin{cases} v_n = u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n \\ w_n = u_{n+1} - \beta u_n = \alpha^n \end{cases}$ en éliminant $u_{n+1}$ entre les deux relations :

$w_n - v_n = (\alpha - \beta)u_n = \alpha^n - \beta^n$ et donc : $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$

Même résultat que ci-dessus ce qui en soi est assez rassurant.

**2.** Remarquons que $u_n = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{1}{\alpha - \beta}\beta^n$ est la différence de deux suites géométriques.

Le réel $\alpha$ est strictement supérieur à 1 tandis que le réel $\beta$ vérifie l'encadrement $-1 < \beta < 0$

Or une suite géométrique de raison donnée $q$ et de premier terme non nul :

- Converge vers zéro si sa raison $q$ vérifie $-1 < q < 1$.
- Diverge vers plus ou vers moins l'infini (suivant le signe de son terme initial) si sa raison $q$ vérifie $q > 1$.

Ainsi, la suite gilbertjulia $\left(\dfrac{1}{\alpha - \beta}\alpha^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers plus l'infini et la suite $\dfrac{1}{\alpha - \beta}\left(\beta^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.

Leur différence $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite qui diverge vers plus l'infini.

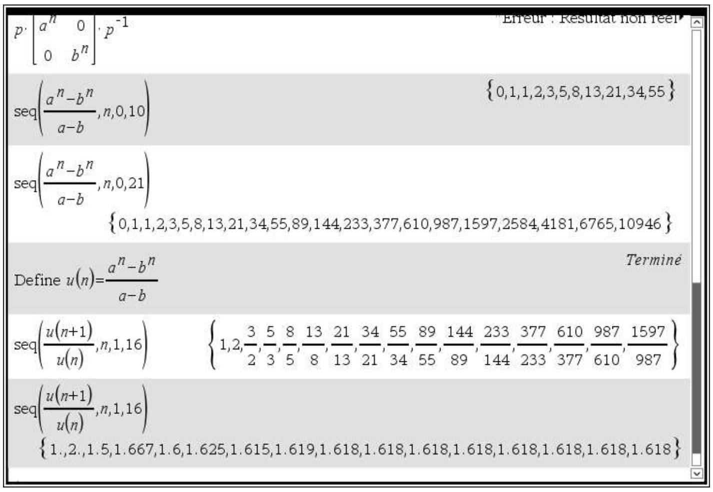
**3.** Pour tout entier $n$ strictement positif : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \alpha \dfrac{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}$

Or, $\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{1}{\alpha^2} = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et une calculatrice indique que $-0{,}39 < \dfrac{\beta}{\alpha} < -0{,}38$ . Vu que ce nombre réel est strictement compris entre $-1$ et 1, la suite de ses puissances $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n$ est une suite géométrique qui converge vers zéro. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$

Le quotient de deux termes consécutifs tend vers la « divine proportion »

## NB.

Un logiciel de calcul formel aurait une certaine utilité pour calculer les premiers termes de la suite $(u_n)$ ainsi que les premiers quotients de deux termes consécutifs.




Ces quotients ont d'abord été calculés en mode exact, puis en mode approché.

En mode approché, on constate une rapide stabilisation de l'affichage autour de 1,618 (ce sont les premières décimales de $\alpha$).

En mode exact remarquer que le logiciel ne modifie jamais l'expression de ces quotients : $\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \ldots \dfrac{1597}{987}$ , signe que ces fractions sont irréductibles. Deux termes consécutifs quelconques de la suite $(u_n)$ sont en effet des entiers premiers entre eux.

Enfin, on peut s'étonner que, malgré une expression truffée de radicaux, les termes de la suite $(u_n)$ soient tous des entiers.

La raison en est que les deux nombres $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ présentent des expressions avec radicaux qui sont *conjuguées* (la partie radicale de l'un est l'opposée de celle de l'autre). La somme des puissances $n^{\text{èmes}}$ de ces deux nombres est un rationnel et la différence de ces mêmes puissances est le produit de $\sqrt{5}$ par un rationnel.

# Problème 3 : Jeu de pile ou face

*Ce jeu de « pile ou face » est associé à l'étude d'une « promenade aléatoire ». Le point M est un « marcheur » qui va se déplacer dans le plan de manière quelque peu erratique. Attention, si ce marcheur atteint à un instant donné l'axe des abscisses, c'est la ruine !*

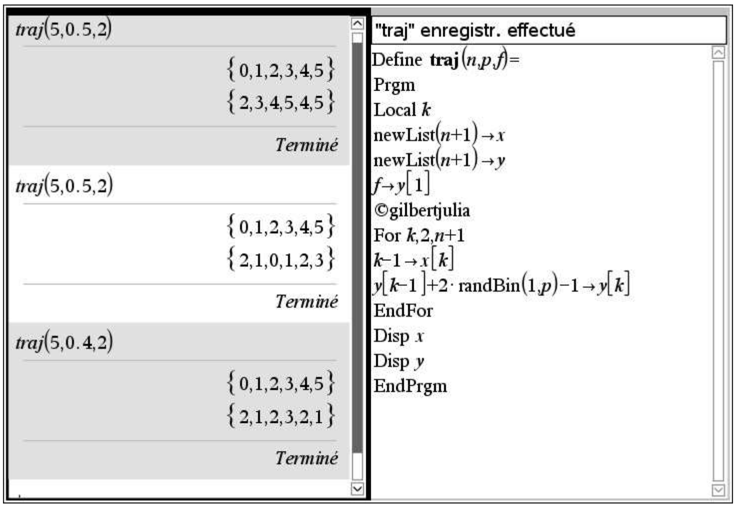
*La pièce que l'on lance est supposée « non équilibrée ». Retenons qu'elle représente une épreuve à deux issues, de probabilités respectives p et $q = 1 - p$, quelle que soit la nature de cette épreuve, lancer de pièce anecdotique ou toute autre situation binaire (oui ou non, succès ou échec, …)*

## Partie A

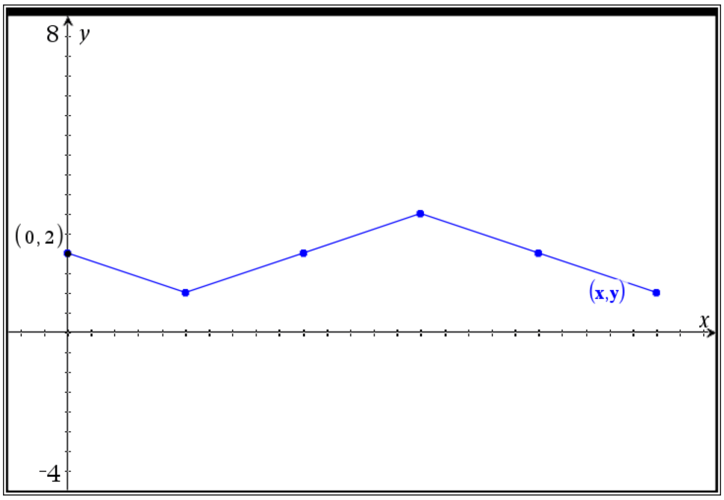
Le programme **traj** est affecté de trois arguments : le nombre $n$ de lancers, la probabilité $p$ d'obtenir Pile, la fortune initiale $f$.

Ce programme renvoie sous forme de listes les abscisses et les ordonnées des points d'une trajectoire.

Il est exécuté ci-contre avec $p = 0{,}5$ puis avec $p = 0{,}4$




La trajectoire obtenue peut être ensuite visualisée.




**2.** Il est possible de répertorier les positions possibles (en ce qui concerne les ordonnées) après un petit nombre de lancers : $\{1, 3\}$ puis $\{0, 2, 4\}$, puis $\{-1, 1, 3, 5\}$ puis $\{-2, 0, 2, 4, 6\}$ et enfin $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$ après 5 lancers.

Il existe une trajectoire aboutissant en $M\,(5,\ y)$ si et seulement si $y \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

Raisonnons cependant de façon générale : pour tout entier $k \geq 1$, $F_k = f_0 + G_k = f_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i$ .

Or, l'ensemble des indices $\{1,2,...,k\}$ admet une partition en deux sous-ensembles : le sous-ensemble qu'on notera $I$ des indices $i$ pour lesquels $X_i = +1$ et son complémentaire, ensemble des indices $i$ pour lesquels $X_i = -1$

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i \in I} (+1) + \sum_{i \in \overline{I}} (-1) = card(I) - (k - card(I)) = 2card(I) - k \ .$$

(La notation *card* pour « cardinal » représente le nombre d'éléments de l'ensemble auquel cette notation s'applique)

Cette somme a la même parité que l'entier *k*.

Sachant que $card(I) \in \{0,\ 1, ...,\ k\}$ :

gj $\sum_{i=1}^{k} X_i \in \{-k, -k+2, ..., k-2, k\}$ et $F_k \in \{f_0 - k,\ f_0 - k + 2, ...,\ f_0 + k - 2, f_0 + k\}$

En particulier, lorsque $f_0 = 2$ ; $k = 5$ : $F_5 \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

Une condition nécessaire pour qu'il existe une trajectoire aboutissant en $M\,(5,\ y)$ est que *y* soit une valeur prise par $F_5$ c'est-à-dire gj appartienne à $\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$.

Réciproquement, on peut facilement faire apparaître sur un graphique des trajectoires aboutissant en chacun des cinq points d'abscisse 5 et dont l'ordonnée appartient à $\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$.

Il existe une trajectoire aboutissant en $M\,(5,\ y)$ si et seulement si $y \in \{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

## Partie B

**1.** On a utilisé implicitement cette variable aléatoire $Y_i$ dans le programme **traj**, c'est $Y_i = \mathbf{randBin}(1,\ p)$.

La fonction $\mathbf{randBin}(n,\ p)$, d'arguments $n$ et $p$ renvoie en effet une valeur choisie aléatoirement dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$, avec une distribution de probabilité conforme à celle d'une loi binomiale de paramètres $n$ (le nombre d'essais) et $p$ (probabilité d'un résultat favorable). Lorsqu'on fixe $n=1$ (un seul essai), comme cela a été fait dans le programme **traj**, cette variable suit une loi de Bernoulli.

Dans ce programme : $X_i = 2Y_i - 1$. Inversement, $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ est la réponse à la question posée.
En effet, $Y_i = 0 \Leftrightarrow X_i = -1$ et $Y_i = 1 \Leftrightarrow X_i = 1$.

**2.** $G_k = \sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i=1}^{k}(2Y_i - 1) = 2\sum_{i=1}^{k} Y_i - k$ et d'autre part $F_k = f_0 + 2\sum_{i=1}^{k} Y_i - k$.

$G_k$ et $F_k$ sont deux fonctions affines de $\sum_{i=1}^{k} Y_i$, variable qui suit la loi binomiale $B(k,\ p)$. Ces deux variables aléatoires ont la même distribution de probabilité que $\sum_{i=1}^{k} Y_i$.

**3.1.** $F_n = (f_0 - n) + 2\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Le nombre $F_n$ représente la fortune finale du joueur, à l'issue des $n$ lancers. Elle est liée au nombre de lancers réussis. On remarque que cette fortune finale peut varier de 2 en 2 depuis $f_0 - n$ jusqu'à $(f_0 - n) + 2n = f_0 + n$. En effet, la variable $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi binomiale $B(n,\ p)$ et en conséquence prend toutes les valeurs de $\{0\ ;\ 1\ ;...;\ n\}$.

Il existe une trajectoire aboutissant en $M\ (n,\ b)$ si et seulement si il existe un entier $m$ appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;...;\ n\}$ tel que : $b = (f_0 - n) + 2m$ c'est-à-dire si et seulement si $\dfrac{b - f_0 + n}{2} \in \{0\ ;\ 1\ ;...;\ n\}$

**3.2.** Cette condition étant vérifiée, $F_n = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = \dfrac{b - f_0 + n}{2}$.

La probabilité qu'il en soit ainsi est la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n,\ p)$ prenne la valeur $\dfrac{b - f_0 + n}{2}$

$$P(n, b, f_0, p) = \binom{n}{\frac{b - f_0 + n}{2}} p^{\frac{b - f_0 + n}{2}} q^{\frac{n - b + f_0}{2}}$$

**4.1.** On peut noter une trajectoire : $t = \left(M_k(k,\ f_k)\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$.

Cette trajectoire touche l'axe des abscisses si et seulement si il existe au moins un indice $j$ appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ldots;\ n-1\}$ tel que $f_j = 0$ (il est exclu que ce soit lorsque $j = 0$ ou lorsque $j = n$).

Soit désormais $j$ le plus petit de ces indices.

On associe à cette trajectoire la trajectoire $t' = \left(M'_k(k,\ f'_k)\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ telle que : $\begin{cases} f'_k = -f_k & si\ 0 \le k \le j \\ f'_k = f_k & si\ k \ge j \end{cases}$, trajectoire qui va de $M'_0$ à $M(n,\ b)$. (Ce qui revient à symétriser la portion de trajectoire avant le premier contact avec $Ox$).

Etudions l'injectivité de l'application $t \mapsto t'$ ainsi définie.

Si deux trajectoires $t_1 = \left(M_k(k,\ f_k)\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ et $t_2 = \left(N_k(k,\ g_k)\right)_{k\in\{0,1,\ldots,n\}}$ sont distinctes, il existe au moins un indice $k$ tel que $f_k \neq g_k$

Soit désormais $k$ le plus petit indice tel que $f_k \neq g_k$

- Ou bien $k < j$ et dans ce cas: $f'_k = -f_k$ mais aussi $g'_k = -g_k \neq f'_k$. En effet, par hypothèse, les trajectoires $t_1$ et $t_2$ coïncident jusqu'au pas $k-1$ : si $t_1$ est restée jusqu'au pas $k-1$ strictement au dessus de l'axe $Ox$, $t_2$ aussi.
- Ou bien $k = j$ et dans ce cas : $g'_j = -g_j < 0$ ; $f'_j = f_j = 0$ ($t_1$ atteint l'axe $Ox$ pour la première fois et $t_2$, qui coïncidait avec $t_1$ pour tous les pas précédents, ne l'atteint pas, on peut même dire que $t_2(j-1) = t_1(j-1) = 1$ et que $t_2(j) = 2$ dans cette circonstance).
- Ou bien $k > j$ et dans ce cas $g'_j = g_j \neq f_j = f'_j$ puisque les trajectoires images coïncident avec les trajectoires antécédentes après le premier contact (commun) avec $Ox$.

Deux trajectoires distinctes ont des images distinctes. L'application $t \mapsto t'$ est injective.

Elle est aussi surjective. En effet, toute trajectoire de $M_0'(0,\ -f_0)$ (qui a une ordonnée strictement négative) à $M(n,\ b)$ (qui a une ordonnée strictement positive) traverse au moins une fois l'axe des abscisses. Cette trajectoire est image de la trajectoire obtenue en symétrisant la portion de trajectoire avant la première (il peut y en avoir plusieurs …) traversée de $Ox$.

Cette application étant injective et surjective est bijective. Il y a autant de trajectoires de $M_0$ à $M(n,\ b)$ qui ont au moins un sommet sur $Ox$ que de trajectoires de $M_0'(0,\ -f_0)$ à $M(n,\ b)$

L'existence de trajectoires issues de $M_0'(0,\ -f_0)$ et aboutissant en $M(n,\ b)$ équivaut à celle d'un entier $m$ appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;\ldots;\ n\}$ tel que : $b = (-f_0 - n) + 2m$ c'est-à-dire au fait que $\dfrac{b + f_0 + n}{2} \in \{0\ ;\ 1\ ;\ldots;\ n\}$. Une condition pour qu'il en soit ainsi est que $\dfrac{b + f_0 + n}{2} \le n$ c'est-à-dire que $b + f_0 \le n$

Lorsque cette condition est vérifiée, le nombre de trajectoires de $M_0$ à $M(n,\ b)$ qui ont au moins un sommet sur $Ox$ est égal à $\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b + f_0 + n}{2} \end{pmatrix}$.

**4.2.** Le nombre total de trajectoires reliant $M_0\,(0,\,f_0)$ à $M\,(n,\,b)$ est égal à $\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}$.

Quant au nombre de ces trajectoires qui touchent l'axe des abscisses, si $b+f_0>n$, il n'en existe pas.

Si $b+f_0\le n$, la question **4.1** a établi qu'il y avait $\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}$ qui touchaient au moins une fois l'axe des abscisses (c'est-à-dire dont au moins un sommet a une abscisse négative ou nulle).

Dans ce cas, par complémentarité, le nombre de trajectoires dont tous les sommets ont une ordonnée strictement positive est égal à $\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}-\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}$

Toutes les trajectoires allant de $M_0\,(0,\,f_0)$ à $M\,(n,\,b)$ sont équiprobables (la probabilité de chacune d'entre elles est égale à $p^{\frac{b-f_0+n}{2}}q^{\frac{n-b+f_0}{2}}$). Sachant qu'une trajectoire relie $M_0\,(0,\,f_0)$ à $M\,(n,\,b)$, la probabilité que tous ses sommets aient une abscisse strictement positive est proportionnelle au nombre des trajectoires favorables.

Il s'agit du quotient $\dfrac{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}-\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}}{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}}\underset{\text{gilbertjulia}}{=}1-\dfrac{\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}}{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}}$

Cette situation correspond au cas où le joueur n'a jamais été ruiné (il n'a jamais dû renouveler sa mise initiale).

**4.3.** Par translation, il y a autant de trajectoires de $M(0,\,f_0)$ à $M(n,\,b)$ que de trajectoires de $M(0,\,f_0+1)$ à $M(n,\,b+1)$.
Une trajectoire de $M(0,\,f_0)$ à $M(n,\,b)$ a tous ses sommets d'ordonnée positive ou nulle si et seulement si sa translatée de vecteur $(0,\,1)$ a tous ses sommets d'ordonnée strictement positive. Il reste à appliquer **4.2**

La condition d'existence de telles trajectoires est $(f_0+1)+(b+1)\le n$, c'est-à-dire $f_0+b\le n-2$. Lorsque cette condition est vérifiée, ce nombre de trajectoires est d'après **4.2** :

$\binom{n}{\frac{(b+1)-(f_0+1)+n}{2}}-\binom{n}{\frac{(b+1)+(f_0+1)+n}{2}}$, c'est-à-dire $\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}-\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}+1}$

Sachant que la trajectoire aboutit en $M\,(n,\,b)$, la probabilité que tous ses sommets aient une ordonnée positive ou nulle est le quotient $\dfrac{\dbinom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}-\dbinom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}+1}}{\dbinom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} 1-\dfrac{\dbinom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}+1}}{\dbinom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}}$. Cette situation correspond au cas où le joueur a pu éventuellement être ruiné à un moment du jeu mais n'a jamais été endetté.

À titre d'exemple, considérons une personne qui joue 20 parties et dont la fortune initiale est égale à 5.

Supposons d'abord que sa fortune finale (nécessairement impaire) soit égale à 3.

$f_0=5\,;\,b=3\,;\,n=20$ . Pour ces valeurs : $\dfrac{b-f_0+n}{2}=\dfrac{3-5+20}{2}=9$ et $\dfrac{b+f_0+n}{2}=\dfrac{3+5+20}{2}=14$

Le nombre de trajectoires allant de $M_0\,(0,\,5)$ à $M\,(20,\,3)$ est $\dbinom{20}{9}$, c'est-à-dire 167960.

Le nombre de trajectoires où le joueur a été ruiné à un moment du jeu est $\dbinom{20}{14}$, c'est à dire 38760 et le nombre de trajectoires où le joueur a été endetté à un moment du jeu est $\dbinom{20}{15}$, c'est-à-dire 15504.

La probabilité que ce joueur ait été ruiné à un moment du jeu, sachant que[2] sa fortune finale est 3, est $\dfrac{38760}{167960}=\dfrac{3}{13}$

Supposons maintenant que sa fortune finale soit égale à 9 : $f_0=5\,;\,b=9\,;\,n=20$.

Le nombre de trajectoires allant de $M_0\,(0,\,5)$ à $M\,(20,\,9)$ est $\dbinom{20}{8}$, c'est-à-dire 125970.

Le nombre de trajectoires où le joueur a été ruiné à un moment du jeu est $\dbinom{20}{17}$, c'est à dire 1140 et le nombre de trajectoires où le joueur a été endetté à un moment du jeu est $\dbinom{20}{18}$, c'est-à-dire 190.

La probabilité que ce joueur ait été ruiné à un moment du jeu, sachant que sa fortune finale est 9, est $\dfrac{1140}{125970}=\dfrac{2}{221}$

Enfin, si on suppose que sa fortune finale est 15, il n'y a qu'une seule trajectoire où le joueur a été ruiné au moment du jeu (il a perdu les 5 premières parties puis gagné les 15 suivantes) et il n'a jamais été endetté.

[2] Il s'agit d'une *probabilité conditionnelle* que l'on calcule ici, d'où la formulation « sachant que … »

## Partie C

**1.** En réutilisant les notations de la partie **A**, si la trajectoire part de l'origine, alors l'ordonnée du point de la trajectoire d'abscisse $k$ est $\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i\in I}(+1) + \sum_{i\in \overline{I}}(-1) = card(I) - (k - card(I)) = 2card(I) - k$. Si cette ordonnée est nulle, alors : $2card(I) - k = 0$ ; nécessairement, $k$ est pair.

**2.** En adaptant la formule trouvée en **B.3.2** : $P(2n,\ 0,\ 0,\ p) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$

**3.** Le nombre de trajectoires en question est le même que le nombre de trajectoires reliant le point $M\,(1,\ 1)$ au point $M\,(2n-1,\ 1)$ (le premier pas partant de l'origine, le dernier revenant sur l'axe des abscisses). C'est-à-dire par translation de vecteur $(-1,\ 0)$ le même que le nombre de trajectoires reliant le point $M\,(0, 1)$ au point $M\,(2n-2,\ 1)$

En adaptant la formule donnant le nombre de trajectoires restant strictement au dessus de l'axe $Ox$ avec $f_0 = b = 1$, et avec $2n-2$ pas, à savoir $\binom{2n-2}{\frac{b - f_0 + (2n-2)}{2}} - \binom{2n-2}{\frac{b + f_0 + (2n-2)}{2}}$, on obtient :

$N_{2n} = \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}$

À titre d'exemple, en supposant $n = 20$ :

$p_{20} = P(20,\ 0,\ 0{,}0.5) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{20}{10}\frac{1}{2^{20}} = \frac{46189}{262144}$ (0,176 à $10^{-3}$ près)

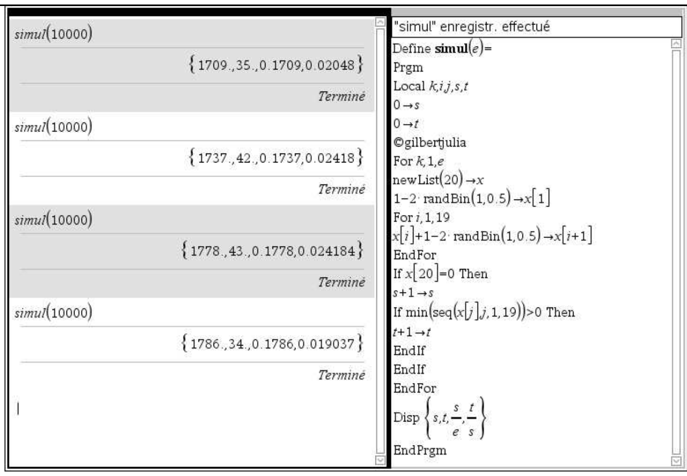
Par ailleurs : $N_{20} = \binom{18}{9} - \binom{18}{10} = 4862$.

Compte tenu qu'il y a 184756 trajectoires s'achevant en $M\,(20,\ 0)$, la probabilité, sachant qu'une trajectoire se termine en ce point, que cette trajectoire se maintienne toujours strictement au dessus de $Ox$ est $\frac{4862}{184756} = \frac{1}{38}$ (0,026 à $10^{-3}$ près).

## Une simulation pour la partie C

Proposons-nous de simuler des séries de 20 lancers d'une pièce équilibrée, de noter les essais tels $F_{20} = F_0 = 0$ et, parmi ces essais, de noter combien de trajectoires pour lesquels tous les $F_i$ sauf $F_0$ et $F_{20}$ sont strictement positifs.

Le programme **simul** est affecté d'un argument $e$ représentant la longueur de la série de 20 lancers. Pour chaque essai numéro $k$, ce programme construit une trajectoire $x$. Si la trajectoire s'achève en zéro ( $x[20]=0$ ), le programme augmente d'une unité la variable $s$. Si en outre toutes les valeurs de la trajectoire $x$ sauf ses extrémités sont strictement positives, le programme augmente d'une unité la variable $t$. Le programme renvoie le nombre $s$ de trajectoires telles que $x[20]=0$ , le nombre $t$ de trajectoires telles que $x[j]>0$ pour tout indice $j$ sauf le dernier et les fréquences $\frac{s}{e}$ ; $\frac{t}{s}$




Le programme a été exécuté plusieurs fois avec $e = 10000$

Pour 10000 essais, compte tenu que un intervalle de fluctuation de la fréquence de trajectoires telles que $x[20]=0$ est l'intervalle $[0{,}166\ ;\ 0{,}187]$. Les quatre fréquences obtenues sont objectivement dans cet intervalle de fluctuation. Le résultat que nous avons trouvé en question **2** est *plausible*. (La simulation ne nous garantit pas, en aucun cas, que ce résultat soit *exact*).

En revanche, il serait illusoire de vouloir évaluer le degré de plausibilité de la probabilité $\frac{1}{38}$ de la question **3**.

Cette probabilité est trop petite, en dehors des normes habituellement admises pour que la simulation que nous avons construite soit pertinente à son propos.

On peut seulement remarquer que les fréquences observées, $0{,}02048\ ;\ 0{,}02418\ ;\ 0{,}024184\ ;\ 0{,}019037$ « ne nous étonnent pas », mais restons subjectifs.