Concours général ES 2017, problème 3 : Marche aléatoire associée à un jeu de pile ou face.

Le sujet n'est pas reproduit ici. On le trouvera facilement sur les pages dédiées au Concours Général. Il m'a interpellé car il semble tout fait pour un concours « moderne » du CAPES. On croirait avoir sous les yeux le sujet de réserve du CAPES 2017 : Une situation classique de Pile ou Face, des probabilités, des promenades aléatoires, un paradis du capésien semé de pâquerettes !

Tout candidat au CAPES 2018 devrait, à titre d'entraînement à l'écrit, traiter les trois problèmes posés cette année pour les séries ES et L. Les trois problèmes sont intéressants, et rivalisent sans coup férir avec les problèmes du CAPES 2017. Il s'agit d'un excellent test, parfaitement ajusté au niveau actuel où se situe le concours.

1. Le sujet

Le sujet est consultable sur le site : http://igmaths.org/spip/spip.php?article265

J'y ajoute une quatrième partie qui exploite les résultats obtenus dans les parties précédentes :

Partie D

On reprend la situation étudiée dans la partie A, c'est-à-dire que le joueur dispose d'une fortune initiale égale à 2 euros et lance 5 fois la pièce : $n=5$; $f_0=2$.

On note comme on l'a fait dans les précédentes parties du problème p la probabilité d'obtenir Pile en lançant la pièce « non supposée équilibrée » comme le dit l'énoncé.

1. Exprimer en fonction de p la probabilité que la fortune du joueur soit, à la fin du jeu, strictement positive. Applications numériques : $p=0{,}6$; $p=0{,}5$; $p=0{,}4$.

2. Exprimer en fonction de p la probabilité que la fortune du joueur soit, tout au long du jeu, toujours strictement positive. Applications numériques : $p=0{,}6$; $p=0{,}5$; $p=0{,}4$.

3. Exprimer en fonction de p la probabilité que la fortune du joueur soit, tout au long du jeu, toujours positive ou nulle. Applications numériques : $p=0{,}6$; $p=0{,}5$; $p=0{,}4$.

Partie A

2. De façon générale, pour tout entier $k \geq 1$, $F_k = f_0 + G_k = f_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i$.

Or, l'ensemble des indices $\{1,2,...,k\}$ admet une partition en deux sous-ensembles : le sous-ensemble qu'on notera I des indices i pour lesquels $X_i = +1$ et son complémentaire, ensemble des indices i pour lesquels $X_i = -1$

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i \in I} (+1) + \sum_{i \in \bar{I}} (-1) = card(I) - (k - card(I)) = 2card(I) - k .$$

Cette somme a la même parité que l'entier k.

Sachant que $card(I) \in \{0, 1, ..., k\}$, $\sum_{i=1}^{k} X_i \in \{-k, -k+2, ..., k-2, k\}$ et $F_k \in \{f_0 - k, f_0 - k + 2, ..., f_0 + k - 2, f_0 + k\}$

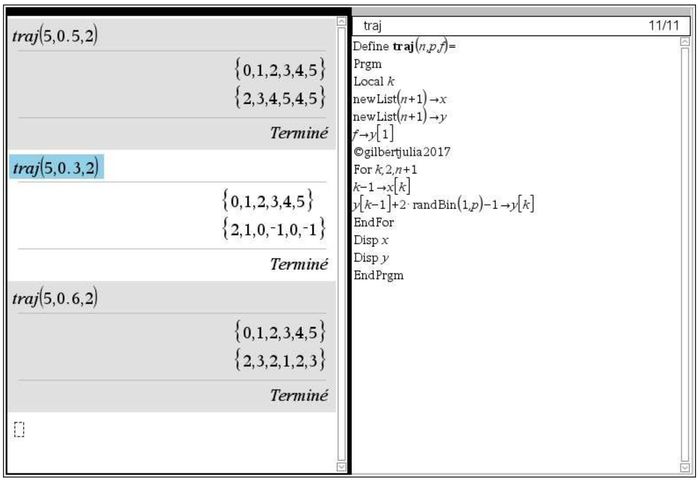
En particulier, lorsque $f_0 = 2$; $k = n = 5$: $F_5 \in \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

Une condition nécessaire pour qu'il existe une trajectoire aboutissant en $M(5, y)$ est que y soit une valeur prise par F_5 c'est-à-dire appartienne à $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$.

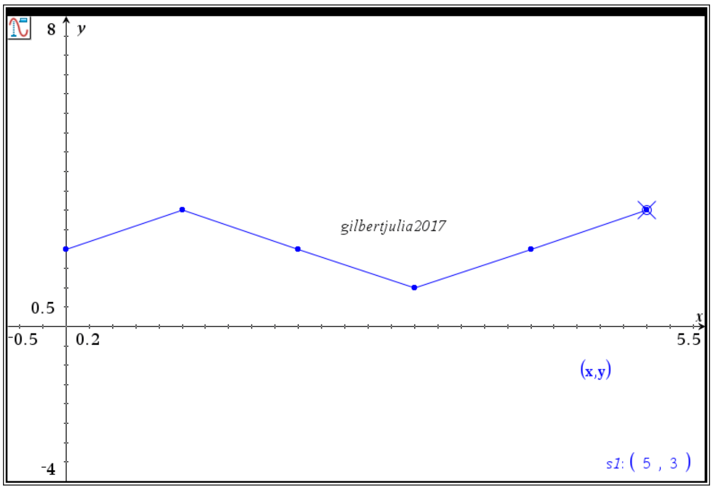
Réciproquement, on peut facilement faire apparaître sur un graphique des trajectoires aboutissant en chacun des cinq points d'abscisse 5 et dont l'ordonnée appartient à $\{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$.

Il existe une trajectoire aboutissant en $M(5, y)$ si et seulement si $y \in \{-3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

Le programme **traj** est affecté de trois arguments : le nombre n de lancers, la probabilité p d'obtenir Pile, la fortune initiale f. Ce programme renvoie sous forme de listes les abscisses et les ordonnées des points d'une trajectoire.



Trajectoire qu'il est possible de visualiser



Partie B

1. On a utilisé implicitement cette variable aléatoire Y_i dans le programme **traj**, c'est $Y_i = \mathbf{randBin}(1,\ p)$.

Dans ce programme : $X_i = 2Y_i - 1$. Inversement, $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i \underset{gilbertjulia2017}{=} \sum_{i=1}^{k}(2Y_i - 1) = 2\sum_{i=1}^{k} Y_i - k$ et $\displaystyle F_k = f_0 + 2\sum_{i=1}^{k} Y_i - k$.

G_k et F_k sont deux fonctions affines de $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} Y_i$, variable qui suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

3.1. $\displaystyle F_n = (f_0 - n) + 2\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

La variable $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi binomiale $B(n,\ p)$ et en conséquence prend les valeurs $\{0\ ;1\ ;...;\ n\}$

Il existe une trajectoire aboutissant en $M(n,\ b)$ si et seulement si il existe un entier m appartenant à $\{0\ ;1\ ;...;\ n\}$ tel que : $b = (f_0 - n) + 2m$ c'est-à-dire si et seulement si $\dfrac{b - f_0 + n}{2} \in \{0\ ;1\ ;...;\ n\}$

3.2. Cette condition étant vérifiée, $\displaystyle F_n = b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = \frac{b - f_0 + n}{2}$. Ainsi :

$$P(n, b, f_0, p) \underset{gjulia2017}{=} \binom{n}{\frac{b - f_0 + n}{2}} p^{\frac{b - f_0 + n}{2}} q^{\frac{n - b + f_0}{2}}$$

4. On peut noter une trajectoire : $t = \left(M_k(k,\ f_k)\right)_{k \in \{0,1,...,n\}}$.

Cette trajectoire touche l'axe des abscisses si et seulement si il existe au moins un indice j appartenant à $\{1\ ;2\ ;...;\ n-1\}$ tel que $f_j = 0$ (il est exclu que ce soit en 0 ou n). Soit désormais j le plus petit de ces indices. On associe à cette trajectoire la trajectoire $t' = \left(M'_k(k,\ f'_k)\right)_{k \in \{0,1,...,n\}}$ telle que :

$\begin{cases} f'_k = -f_k & si\ 0 \le k \le j \\ f'_k = f_k & si\ k \ge j \end{cases}$, trajectoire qui va de M'_0 à $M(n,\ b)$. (Ce qui revient à symétriser la portion de trajectoire avant le premier contact avec Ox).

Etudions l'injectivité de l'application $t \mapsto t'$ ainsi définie.

Si deux trajectoires $t_1 = \left(M_k(k,\ f_k)\right)_{k\in\{0,1,\dots,n\}}$ et $t_2 = \left(N_k(k,\ g_k)\right)_{k\in\{0,1,\dots,n\}}$ sont distinctes, il existe au moins un indice k tel que $f_k \neq g_k$

Soit désormais k le plus petit indice tel que $f_k \neq g_k$

- Ou bien $k < j$ et dans ce cas: $f'_k = -f_k$ mais aussi $g'_k = -g_k \neq f'_k$. En effet, par hypothèse, les trajectoires t_1 et t_2 coïncident jusqu'au pas $k-1$: si t_1 est restée jusqu'au pas $k-1$ strictement au dessus de l'axe Ox, t_2 aussi.
- Ou bien $k = j$ et dans ce cas : $g'_j = -g_j < 0$; $f'_j = f_j = 0$ (t_1 atteint l'axe Ox pour la première fois et t_2, qui coïncidait avec t_1 pour tous les pas précédents, ne l'atteint pas, on peut même dire que $t_2(j-1) = t_1(j-1) = 1$ et que $t_2(j) = 2$ dans cette circonstance).
- Ou bien $k > j$ et dans ce cas $g'_j = g_j \neq f_j = f'_j$ puisque les trajectoires images coïncident avec les trajectoires antécédentes après le premier contact (commun) avec Ox.

Deux trajectoires distinctes ont des images distinctes. L'application $t \mapsto t'$ est injective.

Elle est aussi surjective. En effet, toute trajectoire de M'_0 (qui a une ordonnée strictement négative) à $M(n,\ b)$ (qui a une ordonnée strictement positive) traverse au moins une fois l'axe des abscisses. Cette trajectoire est image de la trajectoire obtenue en symétrisant la portion de trajectoire avant la première (il peut y en avoir plusieurs …) traversée de Ox.

Cette application est bijective. Il y a autant de trajectoires de M_0 à $M(n,\ b)$ qui ont au moins un sommet sur Ox que de trajectoires de M'_0 à $M(n,\ b)$

4.2. Le nombre de trajectoires ne touchant pas l'axe des abscisses est $\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}} - \binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}$.

La probabilité que tous les sommets aient une ordonnée strictement positive sachant que la trajectoire aboutit en $M(n,\ b)$ est donc : $\dfrac{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}} - \binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}}{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}} = 1 - \dfrac{\binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}}}{\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}}}$. Cette situation correspond au cas où le joueur n'a jamais été ruiné (il n'a jamais dû renouveler sa mise initiale).

4.3. Par translation, il y a autant de trajectoires de $M(0,\ f_0)$ à $M(n,\ b)$ que de trajectoires de $M(0,\ f_0+1)$ à $M(n,\ b+1)$. Une trajectoire de $M(0,\ f_0)$ à $M(n,\ b)$ a tous ses sommets d'ordonnée positive ou nulle si et seulement si sa translatée de vecteur $(0,\ 1)$ a tous ses sommets d'ordonnée strictement positive.

Le nombre de trajectoires ne passant pas sous l'axe des abscisses est $\binom{n}{\frac{b-f_0+n}{2}} - \binom{n}{\frac{b+f_0+n}{2}+1}$

La probabilité qu'il en soit ainsi sachant que la trajectoire aboutit en $M(n,\ b)$ est $\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b-f_0+n}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b+f_0+n}{2}+1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b-f_0+n}{2} \end{pmatrix}} \underset{gilbertjulia\,2017}{=} 1-\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b+f_0+n}{2}+1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ \dfrac{b-f_0+n}{2} \end{pmatrix}}$. Cette situation correspond au cas où le joueur a pu éventuellement être ruiné à un moment du jeu mais n'a jamais été endetté.

Partie C

1. En réutilisant les notations de la partie A, si la trajectoire part de l'origine, alors l'ordonnée du point de la trajectoire d'abscisse k est $\sum_{i=1}^{k} X_i = \sum_{i\in I}(+1)+\sum_{i\in \overline{I}}(-1) = card(I)-(k-card(I)) = 2card(I)-k$. Si cette ordonnée est nulle, alors : $2card(I)-k=0$; nécessairement, k est pair.

2. En adaptant la formule trouvée en **B.3.2** : $P(2n,\ 0,\ 0,\ p)=\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\dfrac{1}{2^{2n}}$

3. Le nombre de trajectoires en question est le même que le nombre de trajectoires reliant le point $M(1,\ 1)$ au point $M(2n-1,\ 1)$ (le premier pas partant de l'origine, le dernier revenant sur l'axe des abscisses). C'est-à-dire par translation de vecteur $(-1,\ 0)$ le même que le nombre de trajectoires reliant le point $M(1,\ 1)$ au point $M(2n-2,\ 1)$

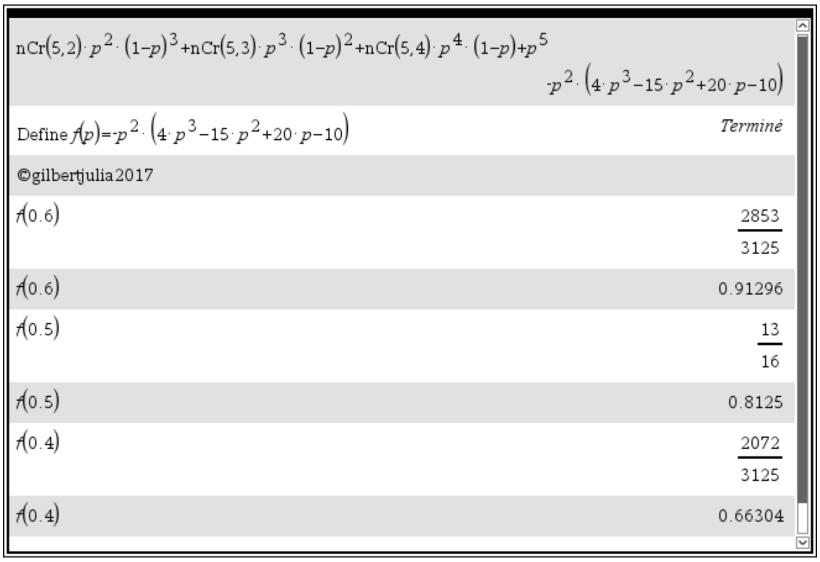
En adaptant la formule donnant le nombre de trajectoires restant strictement au dessus de l'axe Ox avec $f_0=b=1$, et avec $2n-2$ pas, à savoir $\begin{pmatrix} 2n-2 \\ \dfrac{b-f_0+(2n-2)}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2n-2 \\ \dfrac{b+f_0+(2n-2)}{2} \end{pmatrix}$, on obtient :

$N_{2n}=\begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2n-2 \\ n \end{pmatrix}$

Partie D

1. Soit A_b l'évènement : « la trajectoire aboutit en $M\ (5,\ b)$ » où b appartient à $\{-3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\}$ et E l'évènement « la fortune du joueur est, à la fin du jeu, strictement positive ».

$E = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ et les évènements A_b sont deux à deux disjoints.



$$P(E)=P(A_1)+P(A_3)+P(A_5)+P(A_7)=\binom{5}{2}p^2q^3+\binom{5}{3}p^3q^2+\binom{5}{4}p^4q+p^5=\left(10-20p+15p^2-4p^3\right)p^2$$

2. Soit F l'évènement « la fortune du joueur est, tout au long du jeu, toujours strictement positive »

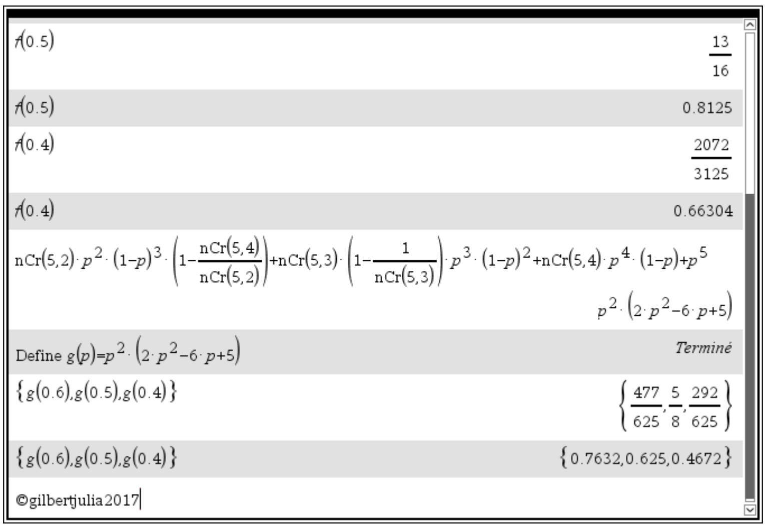
$F=(A_1\cap F)\cup(A_3\cap F)\cup(A_5\cap F)\cup(A_7\cap F)$ et $P(F)=P(A_1\cap F)+P(A_3\cap F)+P(A_5\cap F)+P(A_7\cap F)$

$$P(F)=\binom{5}{2}p^2q^3\times\left(1-\frac{\binom{5}{4}}{\binom{5}{2}}\right)+\binom{5}{3}p^3q^2\times\left(1-\frac{\binom{5}{5}}{\binom{5}{3}}\right)+\binom{5}{4}p^4q+p^5$$

Pour chaque valeur de b : $P(A_b\cap F)=P(A_b)\times+P_{A_b}(F)$.

Pour les probabilités conditionnelles de F sachant A_b, on réutilise les formules trouvées dans la partie B **4.2** et **4.3** (qui sont des probabilités conditionnelles). Lorsque $b=5$ ou $b=7$, ces probabilités conditionnelles sont égales à 1.

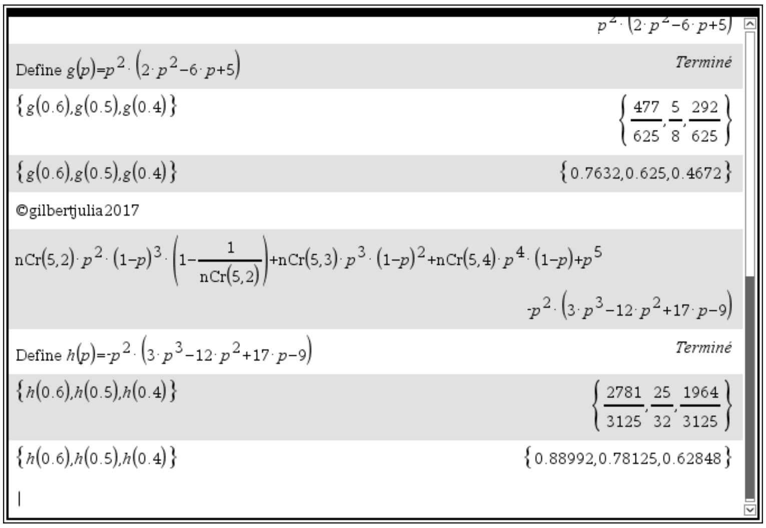
On obtient $P(F)=p^2\left(5-6p+2p^2\right)$



3. On procède de même pour l'évènement G : « la fortune du joueur est, tout au long du jeu, toujours positive ou nulle ».

on obtient :

$P(G) = p^2\left(9 - 17p + 12p^2 - 3p^3\right)$



$p^2\cdot(2\cdot p^2-6\cdot p+5)$

Define $g(p)=p^2\cdot(2\cdot p^2-6\cdot p+5)$ *Terminé*

$\{g(0.6),g(0.5),g(0.4)\}$ $\left\{\frac{477}{625},\frac{5}{8},\frac{292}{625}\right\}$

$\{g(0.6),g(0.5),g(0.4)\}$ $\{0.7632,0.625,0.4672\}$

©gilbertjulia2017

$\mathrm{nCr}(5,2)\cdot p^2\cdot(1-p)^3\cdot\left(1-\frac{1}{\mathrm{nCr}(5,2)}\right)+\mathrm{nCr}(5,3)\cdot p^3\cdot(1-p)^2+\mathrm{nCr}(5,4)\cdot p^4\cdot(1-p)+p^5$

$-p^2\cdot(3\cdot p^3-12\cdot p^2+17\cdot p-9)$

Define $h(p)=-p^2\cdot(3\cdot p^3-12\cdot p^2+17\cdot p-9)$ *Terminé*

$\{h(0.6),h(0.5),h(0.4)\}$ $\left\{\frac{2781}{3125},\frac{25}{32},\frac{1964}{3125}\right\}$

$\{h(0.6),h(0.5),h(0.4)\}$ $\{0.88992,0.78125,0.62848\}$

En effet : $P(G)=\binom{5}{2}p^2q^3\times\left(1-\dfrac{\binom{5}{5}}{\binom{5}{2}}\right)+\binom{5}{3}p^3q^2+\binom{5}{4}p^4q+p^5$.

Lorsque $b=3$ ou $b=5$ ou $b=7$, les probabilités conditionnelles de G sachant A_b sont égales à 1.

3. Simulations

Partie C

On se propose de simuler une série expériences, en notant dans cette série les trajectoires qui vont d'un point donné $M(0,\ f_0)$ à un point donné $M(n,\ b)$, et en calculant les proportions parmi ces trajectoires de celles qui restent strictement ainsi qu'au sens large au dessus de l'axe des abscisses.

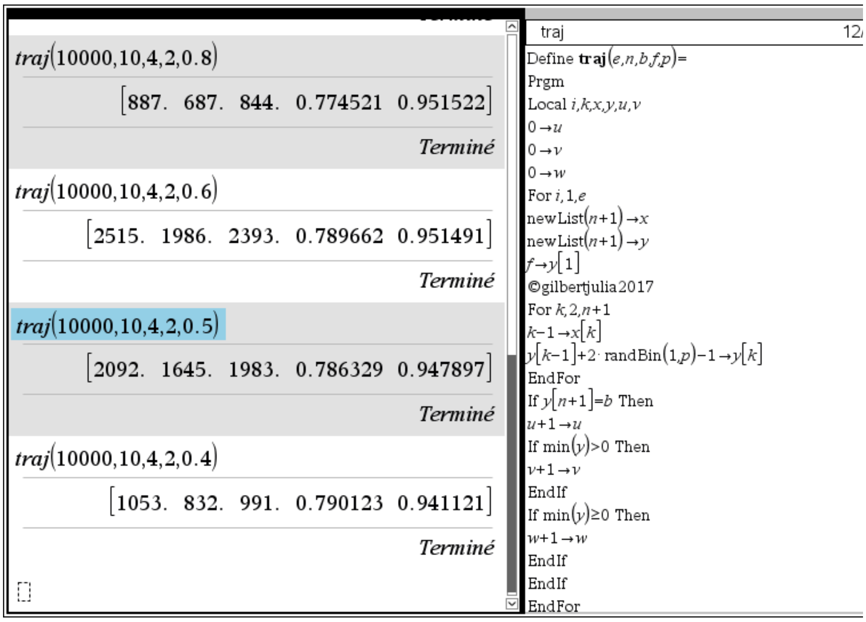
Plaçons-nous d'abord dans le cas où $n=10$; $b=4$; $f_0=2$.

D'après l'étude qui vient d'être faite :

- La probabilité qu'une trajectoire aille de $M_0\ (0,\ 2)$ à $M\ (10,\ 4)$ est : $P(10,4,2,\ p)=\binom{10}{6}p^6\,q^4$.
- La probabilité qu'une parmi ces trajectoires soit toujours strictement au dessus de l'axe des abscisses est : $1-\dfrac{\binom{10}{8}}{\binom{10}{6}}=\dfrac{11}{14}=0{,}786$ à 10^{-3} près.
- La probabilité qu'une parmi ces trajectoires soit toujours au sens large au dessus de l'axe des abscisses est : $=1-\dfrac{\binom{10}{9}}{\binom{10}{6}}=\dfrac{20}{21}=0{,}952$ à 10^{-3} près.

Le programme **traj** a été modifié de façon à simuler une série de e essais dans lesquels on relève le nombre u de trajectoires allant de $M(0,\ f)$ à $M(n,\ b)$, parmi elles le nombre v de trajectoires restant strictement au dessus de Ox et w au sens large puis les proportions $\dfrac{v}{u}, \dfrac{w}{u}$ de ces trajectoires parmi celles qui vont de $M(0,\ f)$ à $M(n,\ b)$.

Ci-contre, on procède à 10000 essais avec diverses valeurs de la probabilité p.



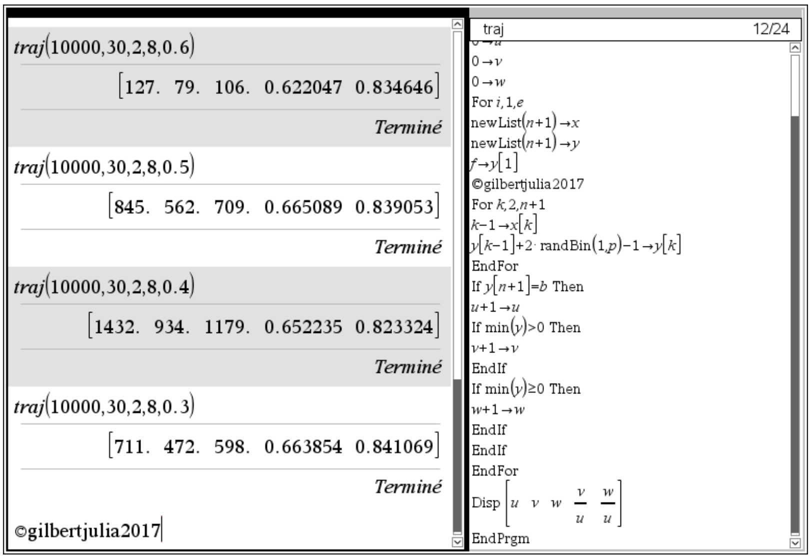
On peut conjecturer que, si le nombre u varie selon le choix de p, en revanche les proportions $\dfrac{v}{u}, \dfrac{w}{u}$ restent passablement stables. On peut comparer avec les probabilités théoriques.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $n=30$; $b=2$; $f_0=8$.

- La probabilité qu'une parmi les trajectoires possibles soit toujours strictement au dessus de l'axe des abscisses est : $1-\dfrac{\dbinom{30}{\frac{2+8+30}{2}}}{\dbinom{30}{\frac{2-8+30}{2}}}=1-\dfrac{\dbinom{30}{20}}{\dbinom{30}{12}}=\dfrac{62}{95}=0{,}653$ à 10^{-3} près.
- La probabilité qu'une parmi les trajectoires possibles soit toujours au sens large au dessus de l'axe des abscisses est : $1-\dfrac{\dbinom{30}{\frac{2+8+30}{2}+1}}{\dbinom{30}{\frac{2-8+30}{2}}}=1-\dfrac{\dbinom{30}{21}}{\dbinom{30}{12}}=\dfrac{111}{133}=0{,}835$ à 10^{-3} près.

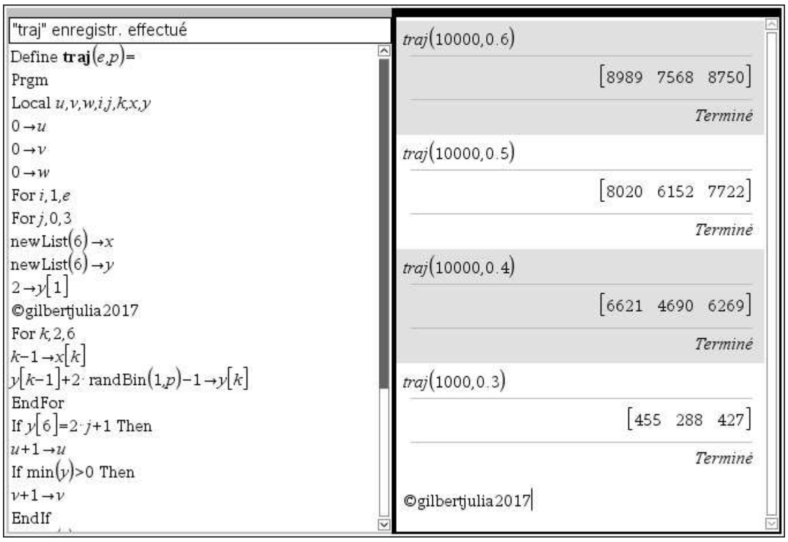
La simulation illustre cette situation. On effectue toujours 10000 essais avec diverses valeurs de *p*.

Confronter avec les probabilités théoriques.

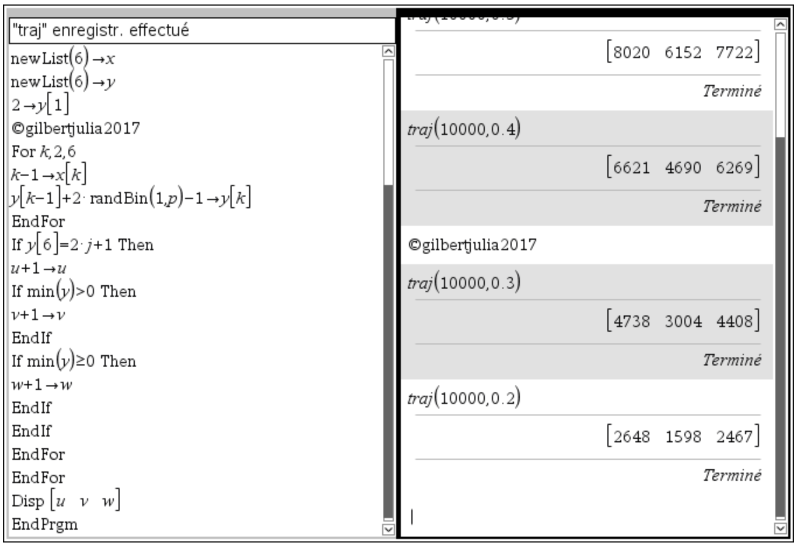


Partie D

Le programme **traj** a été une nouvelle fois modifié. Il simule maintenant une série de e expériences de 5 lancers, au cours de laquelle on dénombre les trajectoires aboutissant à un point d'ordonnée positive (variable **u**), ainsi que les trajectoires restant au dessus de Ox, strictement (variable **v**) ou au sens large (variable **w**).



Il reste à confronter ces les fréquences de réalisations de E, F, G avec leurs probabilités théoriques.



Confrontation laissée au lecteur …