Concours général 2016, problème 3 : Allons dans C

La situation étudiée s'apparente à une promenade aléatoire dans le plan orienté telle que le marcheur, parti de l'origine d'un repère, avance à chaque instant d'un pas en visant de façon équiprobable soit le cap 90 (plein Est), soit le cap 210, soit le cap 330.

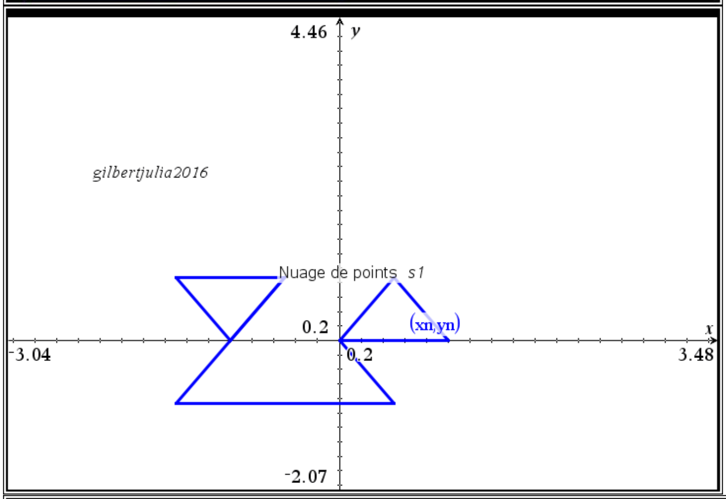
1. Une simulation

Il est possible de simuler une telle marche aléatoire.
La cellule A1 reçoit le nombre de pas noté **nn.**
La colonne **num** numérote les pas, tandis que la colonne **zn** décrit chacun des pas. La colonne **sn** indique la position atteinte après chaque pas, et les colonnes suivantes recueillent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de cette position.
Sur l'écran ci-contre, on considère une marche de 12 pas et on remarque un passage par l'origine au neuvième pas.

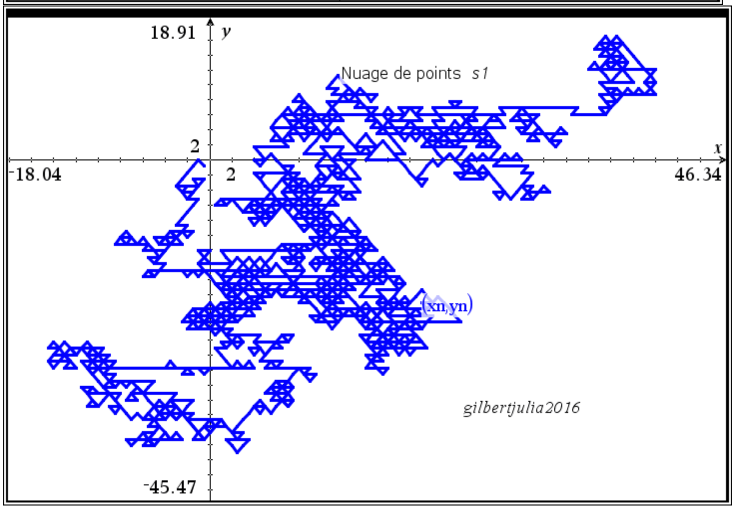
	A	B num	C zn	D sn	E xn	F yn	G
=		=seq(k,	zn:=seq((-1/2+i…	=cumulativesum	=real(sn)	=imag(sn)	
1	12	1	-1/2+√(3)/2*i	-1/2+√(3)/2*i	-1/2	√(3)/2	
2		2	-1/2-√(3)/2*i	-1	-1	0	
3	gilbjulia	3	-1/2+√(3)/2*i	-3/2+√(3)/2*i	-3/2	√(3)/2	
4		4	1	-1/2+√(3)/2*i	-1/2	√(3)/2	
5		5	-1/2-√(3)/2*i	-1	-1	0	
6		6	-1/2-√(3)/2*i	-3/2-√(3)/2*i	-3/2	-√(3)/2	
7		7	1	-1/2-√(3)/2*i	-1/2	-√(3)/2	
8		8	1	1/2-√(3)/2*i	1/2	-√(3)/2	
9		9	-1/2+√(3)/2*i	0	0	0	
10		10	1	1	1	0	

C $zn:=seq\left(\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^{randint(1,6)},k,1,nn\right)$

Une représentation graphique visualise tant bien que mal la marche aléatoire.
Ce marcheur finit sa randonnée à l'origine (de façon purement fortuite).



Voici une marche de 2400 pas. Cette fois, le marcheur n'est jamais passé par l'origine et semble au contraire s'en être éloigné. Y reviendra-t-il un jour ?



2. Quelques pistes

1. Les complexes 1, $j=-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de l'unité, affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité. De façon générale, pour tout entier naturel k :

$j^{3k}=1$; $j^{3k+1}=j$; $j^{3k+2}=j^2$

$$a+b\,j+c\,j^2=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)$$

3.1. Par définition des trois compteurs : $U_n+V_n+W_n=n$ puisqu'à chaque lancer, un et un seul des compteurs augmente d'une unité.

4. Dans cette question, on peut modéliser à l'aide de l'univers $\Omega=\{1\ ;\ j\ ;\ j^2\}^{3m}$ constitué de 3^{3m} éléments muni de l'équiprobabilité, chaque évènement élémentaire ayant pour probabilité $\frac{1}{3^{3m}}$.

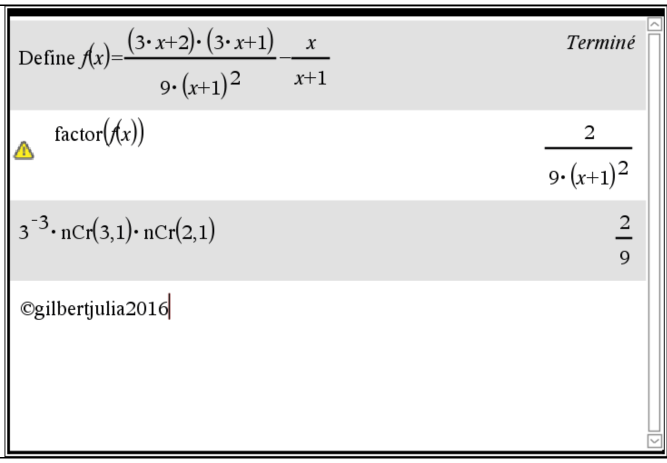
4.1. U_n suit la loi binomiale $B\left(3m\ ;\frac{1}{3}\right)$.

4.3. Sachant que $U_{3m}=m$, il reste $2m$ lancers dont l'issue est de façon équiprobable l'une ou l'autre des issues j ou j^2.

4.4. Il s'agit de déterminer $p_{3m}=P([U_{3m}=m]\cap[V_{3m}=m])$.

$$P_{U_{3m}=m}([V_{3m}=m])=\frac{P([U_{3m}=m]\cap[V_{3m}=m])}{P([U_{3m}=m])}$$

5. L'écran ci-contre peut s'exploiter d'une part pour écrire une expression de $\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}-\frac{m}{m+1}$ et d'autre part pour exprimer la probabilité p_3



6.1. Soit Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si $S_k=0$ et qui vaut zéro sinon.
Les Y_{3j} suivent une loi de Bernoulli de paramètre p_{3j} tandis que les autres sont la variable aléatoire identiquement nulle.

6.3. Pour tout entier $n\geq 3$, il existe un entier $m\geq 1$ tel que : $3m\leq n<3m+3$.

La somme $\sum_{j=1}^{m}p_{3j}$ est inférieure ou égale à $\frac{2}{9}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j}\right)$. Il reste à démontrer que cette somme tend vers l'infini.

On peut justifier que pour chaque entier j strictement positif : $\ln(j+1)-\ln(j)\leq\frac{1}{j}\ldots$

7.1. S'il existe un entier *k* tel que $1 \leq k \leq n$ tel que $S_k = 0$, alors *a fortiori* il existe un entier *k* tel que $1 \leq k \leq n+1$ et tel que $S_k = 0$. Les évènements « il existe un entier *k* tel que $1 \leq k \leq n$ et tel que $S_k = 0$ » sont emboîtés. Il s'ensuit que la suite (q_n) est croissante…

7.2. Si *r* est un entier naturel non nul :
$$q_{r+1} = P[X_n \geq r+1] = P_{X_n \geq r}[X_n \geq r+1] \times P[X_n \geq r] = P_{X_n \geq r}[X_n \geq r+1] \times q_r$$

7.3. Si $q < 1$, alors la suite des espérances aurait une limite finie.

La conclusion du problème est que le marcheur va de façon quasi certaine repasser par l'origine une infinité de fois.

1. Les complexes 1, $j=-\frac{1}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2=-\frac{1}{2}-\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les racines cubiques de l'unité, affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité. De façon générale, pour tout entier naturel k :
$j^{3k}=1$; $j^{3k+1}=j$; $j^{3k+2}=j^2$

$$a+b\,j+c\,j^2=0 \Leftrightarrow \left(a-\frac{b+c}{2}\right)+\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)=0$$

$$a+b\,j+c\,j^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b-c=0 \\ a=\dfrac{b+c}{2}\end{cases} \text{ soit } a+b\,j+c\,j^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$$

3.1. Par définition des trois compteurs : $U_n+V_n+W_n=n$ puisqu'à chaque lancer, un et un seul des compteurs augmente d'une unité.
3.2. On peut grouper les Z_j en trois paquets de cardinaux respectifs U_n, V_n et W_n, selon le résultat des lancers.
3.3. Découle du **1.3.** Du fait que $U_n+V_n+W_n=n$, $U_n=V_n=W_n \Rightarrow n=U_n+V_n+W_n=3U_n$

4. Dans cette question, on peut modéliser à l'aide de l'univers $\Omega=\{1\ ;\ j\ ;\ j^2\}^{3m}$ constitué de $\frac{1}{3^{3m}}$ éléments muni de l'équiprobabilité.

4.1. U_n suit la loi binomiale $B\left(3m\ ;\frac{1}{3}\right)$. Il en est de même de V_n et W_n.

4.2. $P(U_{3m}=m)=\binom{3m}{m}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2m}=\binom{3m}{m}\times\frac{2^{2m}}{3^{3m}}$

4.3. Sachant que $U_{3m}=m$, il reste $2m$ lancers dont l'issue est de façon équiprobable l'un ou l'autre des issues j ou j^2. La variable V_{3m} sachant $U_{3m}=m$ suit la loi binomiale $B\left(2m\ ;\frac{1}{2}\right)$

$$P_{U_{3m}=m}([V_{3m}=m])=\binom{2m}{m}\times\frac{1}{2^{2m}}$$

4.4. Il s'agit de déterminer $p_{3m}=P([U_{3m}=m]\cap[V_{3m}=m])$.

$$P_{U_{3m}=m}([V_{3m}=m])=\binom{2m}{m}\times\frac{1}{2^{2m}}=\frac{P([U_{3m}=m]\cap[V_{3m}=m])}{\binom{3m}{m}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2m}}$$

Il s'ensuit que $p_{3m}=P([U_{3m}=m]\cap[V_{3m}=m])=\binom{3m}{m}\times\binom{2m}{m}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{3m}$

7.2. Si r est un entier naturel non nul : Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{X_n\geq r}[X_n\geq r+1]=\frac{P([X_n\geq r+1]\cap[X_n\geq r])}{P[X_n\geq r]}=\frac{P([X_n\geq r+1])}{P[X_n\geq r]}$$

On en déduit : $q_{r+1}=P[X_n\geq r+1]=P_{X_n\geq r}[X_n\geq r+1]\times P[X_n\geq r]=P_{X_n\geq r}[X_n\geq r+1]\times q_r$

Sachant qu'il existe au moins k lancers tels que $S_k=0$, il y en a au moins $k+1$ s'il y en a un de nul parmi les $n-k$ autres lancers. Cette probabilité est inférieure ou égale à la probabilité que l'un quelconque des S_k soit nul. $P_{X_n\geq k}[X_n\geq k+1]\leq q_n$

Ainsi quel que soit l'entier naturel r : $q_{r+1} \leq q_n \times q_r$.
En considérant toutes ces inégalités depuis l'entier 1 jusqu'à l'entier r : $q_r \leq (q_n)^{r-1} \times q_1$
Et puisque $q_1 \leq q_n \leq q$: $q_r \leq q^r$ **.**
7.3.