Concours général 2016, problème 2 : La rangée d'arbres qui cache la forêt

Il n'y a pas si longtemps, la baronnie de Joch se caractérisait par ses innombrables champs de pêchers plantés régulièrement. Ceux-ci étaient taillés en gobelets : d'un tronc haut de un mètre environ partaient quatre ou cinq branches maîtresses qui se divisaient ensuite, de sorte que chaque pêcher pouvait être schématisé par un étroit cylindre surmonté d'un cône renversé. L'été, lorsque les arbres étaient en feuilles et les pêches bonnes à cueillir, je me souviens d'un réflexe qu'avaient les agriculteurs jochinencs, en particulier ceux qui avaient des propriétés en bordure de la route de Valmanya, pour surveiller si quelque chapardeur était dans leur champ : ils se baissaient et regardaient au niveau des troncs. En effet à hauteur d'homme, les feuilles cachaient l'ensemble du champ sauf l'axe de la rangée où l'on se trouvait alors qu'au niveau des troncs, le champ de vision en atteignait sans peine les limites.

Cette très intéressante étude me rappelle nostalgiquement ce réflexe et en fait comprendre la raison. Merci pour tout cela à l'auteur du sujet.

Quelques pistes de réflexion

1. La distance d'un point A de coordonnées $(a\ ;\ b)$ à la droite D_m d'équation $y - m\,x = 0$ est égale à $\dfrac{|b - m\,a|}{\sqrt{1+m^2}}$.

2. On peut rappeler les théorèmes concernant les sous-groupes additifs de **R** :

- Tout sous-groupe additif de **R** est soit de la forme $a\mathbf{Z}$ où a est un réel positif soit dense dans **R** (c'est-à-dire que, quel que soit le réel x et le réel strictement positif ε, tout intervalle ouvert $]x-\varepsilon,\ x+\varepsilon[$ contient au moins un élément de G)
- Soit m un réel strictement positif et le sous-groupe additif de **R** : $G =$ $\{y - mx\ ;\ x \in \mathbf{Z}\ ;\ y \in \mathbf{Z}\}$. Ce sous groupe additif est dense dans **R** si et seulement si m est irrationnel. Il en est évidemment de même du sous groupe additif : $\{2y - 2mx\ ;\ x \in \mathbf{Z}\ ;\ y \in \mathbf{Z}\}$ ainsi que de l'ensemble qui s'en déduit par translation : $H = \{2y - 2mx + 1 - m\ ;\ x \in \mathbf{Z}\ ; y \in \mathbf{Z}\} = \{(2y+1) - m(2x+1)\ ;\ x \in \mathbf{Z}\ ;\ y \in \mathbf{Z}\}$.

D'où la propriété admise : Quel que soit le réel strictement positif ε, il existe deux entiers x et y tels que : $0 < |(2y+1) - m(2x+1) < \varepsilon|$. Puisque m est supposé strictement positif, ces deux entiers ont nécessairement le même signe, on peut les choisir tous deux positifs.

3.2. Si a et b sont de parités différentes, et si D_m rencontre un arbre planté en $(u\ ;\ v)$ où u et v sont deux entiers impairs : $\left|v - u\dfrac{b}{a}\right| \le R\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$. Dans ce cas : $|v\,a - u\,b| \le R\sqrt{a^2+b^2}$. Etudier la parité des deux entiers va et ub puis conclure.

5. Supposons que $1 \le R\sqrt{5}$. Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, on peut non seulement se restreindre au quart de plan de coordonnées strictement positives, mais aussi au huitième de plan tel que $y \ge x > 0$. En effet, si la demi-droite D_m de coefficient directeur m rencontre l'arbre planté en $(a\ ;\ b)$, alors la droite $D_{1/m}$ de coefficient directeur $\dfrac{1}{m}$ rencontre l'arbre planté en $(b\ ;\ a)$. On peut par conséquent supposer que $m \ge 1$. Si la demi-droite D_m rencontre la première rangée, c'est en un arbre planté en un point $(1\ ;\ b)$.

- Si $1 \leq m \leq 2$, montrer que si le cercle centré en $(1\ ;\ 1)$ a un rayon supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{5}}{5}$, alors la demi-droite D_m le rencontre.
- Si $m > 2$: gjulia2016 $R^2\left(1+m^2\right)-(b-m)^2 \geq \frac{1}{5}\left(1+m^2\right)-(b-m)^2 = -b^2+2mb+\frac{1-4m^2}{5}$.Montrer que l'expression polynomiale du deuxième degré $-b^2+2mb+\frac{1-4m^2}{5}$ est positive pour au moins un entier b impair.

6. La question **4** établit que si toutes les demi-droites D_m rencontrent un arbre alors $R \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$ et en vertu de **5**, ceci implique que toutes les D_m rencontrent un arbre de la première rangée. Contraposer.