Concours général 2016 : Problème 1, sommes de cubes.

Ce problème 1 a pour objectif de montrer que tout entier sauf un nombre fini d'entre eux est décomposable en une somme de cubes d'entiers distincts.

1. Quelques programmes pour la question 1

Le programme **sumcub(*n*)** affiche sous forme de liste les entiers appartenant à S que l'on peut construire à l'aide des n premiers cubes d'entiers strictement positifs deux à deux distincts.

Attention, pour des raisons de construction, la liste affichée commence par zéro, entier qui n'appartient pas à S. Il en sera de même dans les deux programmes suivants.

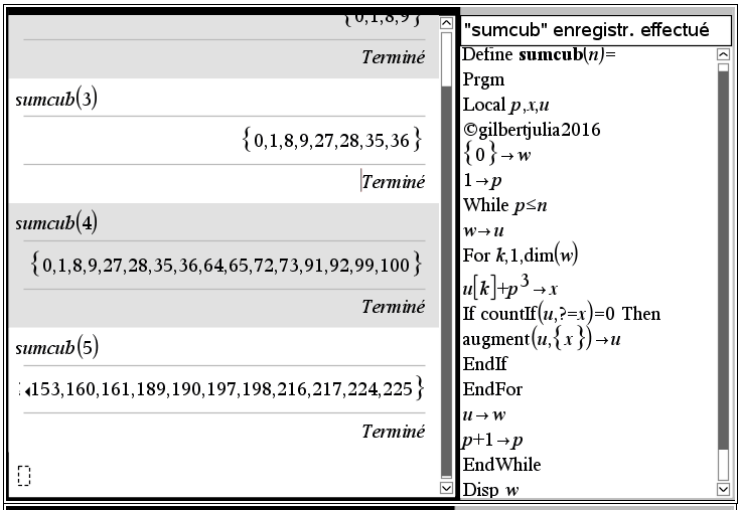
On peut ajouter en fin de programme la ligne : **right**$(w, \dim(w)-1) \to w$ avant l'affichage final.

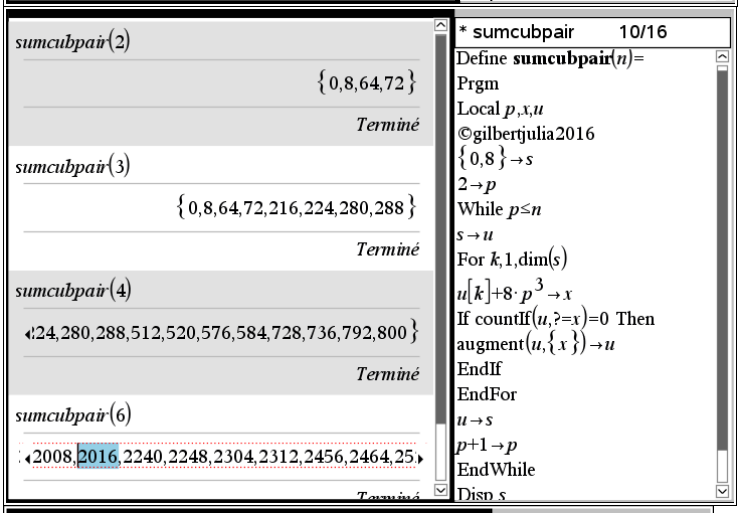
En modifiant convenablement l'écriture de ce programme, il est possible d'afficher sous forme de liste les entiers appartenant à S_0 que l'on peut construire à l'aide des n premiers cubes d'entiers pairs.

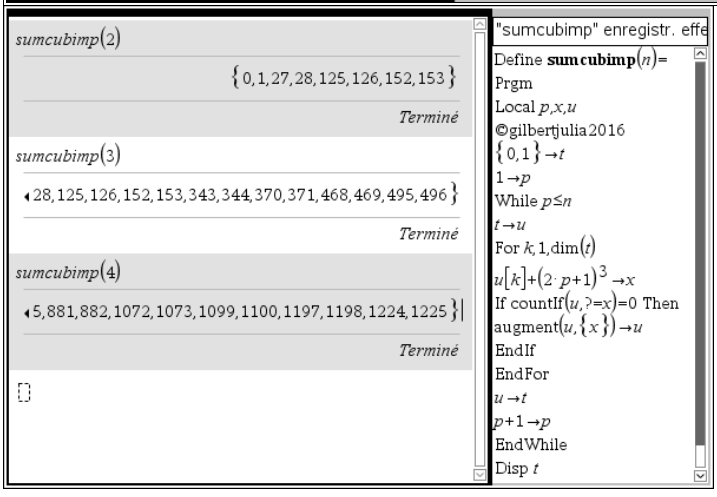
On apprend en particulier que 2016 figure dans la liste des entiers décomposables en somme de cubes choisis parmi les six premiers entiers pairs.

On affiche de la même façon à l'aide du programme **sumcubimp** les entiers appartenant à S_1 que l'on peut construire à l'aide des n premiers entiers impairs.

Ci-contre, à l'aide de 1, 3, 5, 7 et 9.

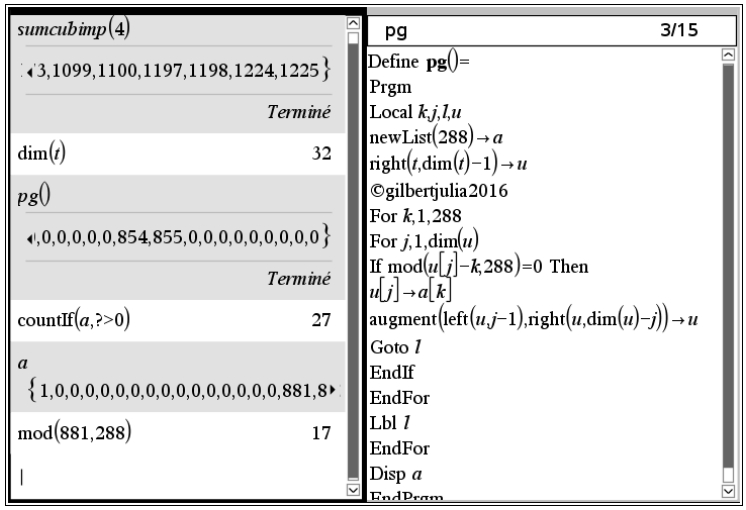




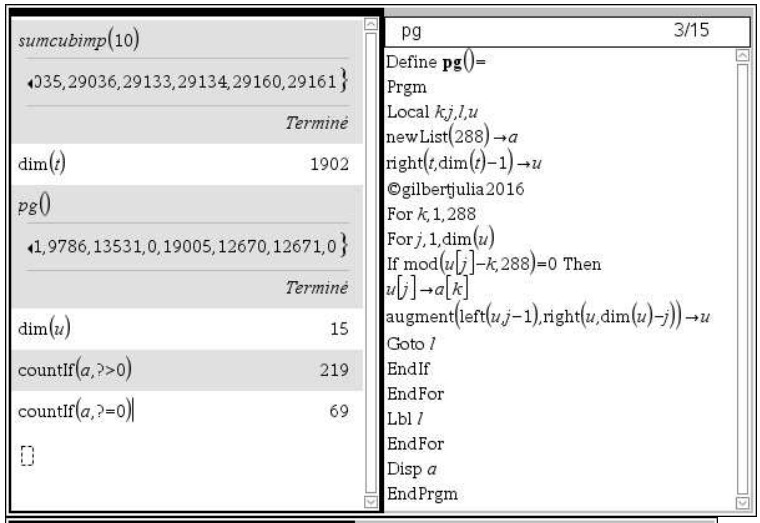


2. Une tentative inaboutie de résolution exhaustive de la question 3

Supposons construite la liste **t** des éléments de S_1 qui s'expriment comme somme de cubes d'un ou plusieurs des premiers entiers impairs. Le programme **pg()** a pour objectif de construire une liste nommée **a** d'entiers extraits de **t** qui vérifient les conditions de la question **3**, c'est-à-dire que le terme de rang k de la liste **a** est congru à l'entier k modulo 288.
Par exemple, si l'on construit la liste **t** des éléments de S_1 qui s'expriment comme somme de cubes d'un ou plusieurs des entiers 1, 3, 5, 7, 9 alors on obtient 27 entiers convenables (ainsi, 881 est le terme numéro 17 et il est congru à 17 modulo 288). Les entiers non obtenus sont représentés par des zéros.



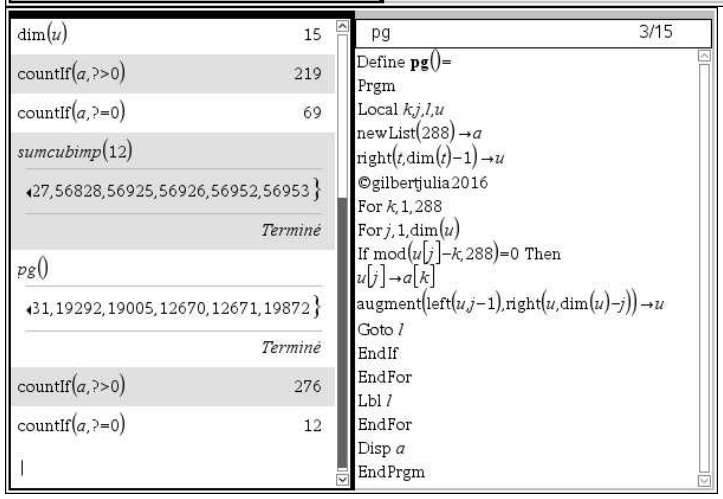
Si l'on construit la liste **t** des éléments de S_1 qui s'expriment comme somme de cubes des dix premiers entiers impairs, alors on obtient 219 entiers convenables. Il en manque 69 …



Si l'on construit la liste **t** des éléments de S_1 qui s'expriment comme somme de cubes des douze premiers entiers impairs (donc des entiers impairs jusqu'à l'entier 25), alors on obtient 276 entiers convenables. Il en manque encore 12 …

Au-delà, les capacités de gestion de la liste **t** sont dépassées car la longueur de cette liste double chaque fois que l'on prend en compte un nouvel entier impair.

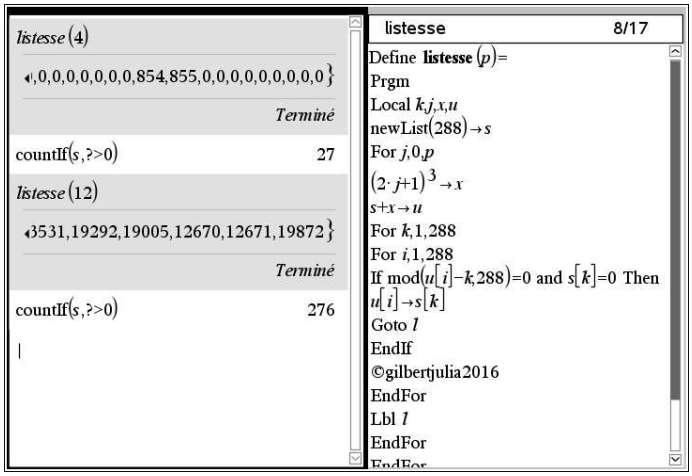
(Voir avec un logiciel plus puissant que TI*n*Spire ?)



Si l'on répertorie les entiers non encore obtenus, il s'agit des entiers 5, 32, 59, 77, 140, 158, 185, 212, 230, 239, 266 et 275.

3. Une liste S complète

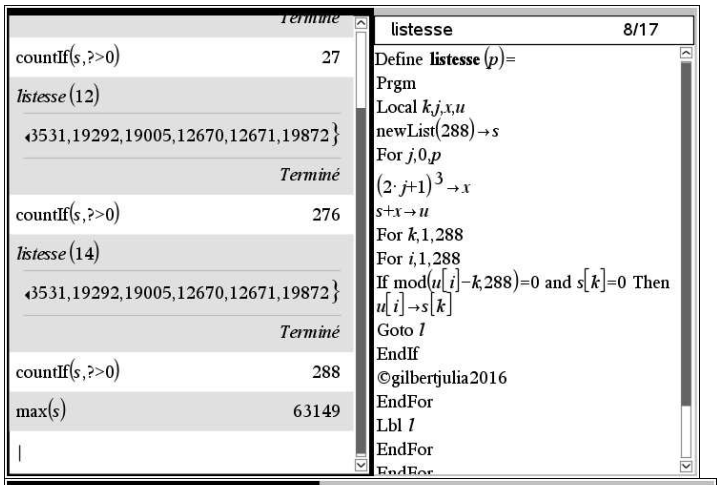
Une autre méthode consiste à remplir progressivement une liste de 288 entiers à l'aide de sommes d'entiers impairs convenables. Le programme **listesse(*p*)** prend en compte l'un après l'autre les p premiers entiers impairs et calcule les sommes de cubes que l'on peut obtenir ainsi. Lorsqu'une somme est congrue à un entier k de $\{1, 2,..., 288\}$, le programme place cette somme au k-ème rang de la liste **s** et passe à l'entier k suivant.



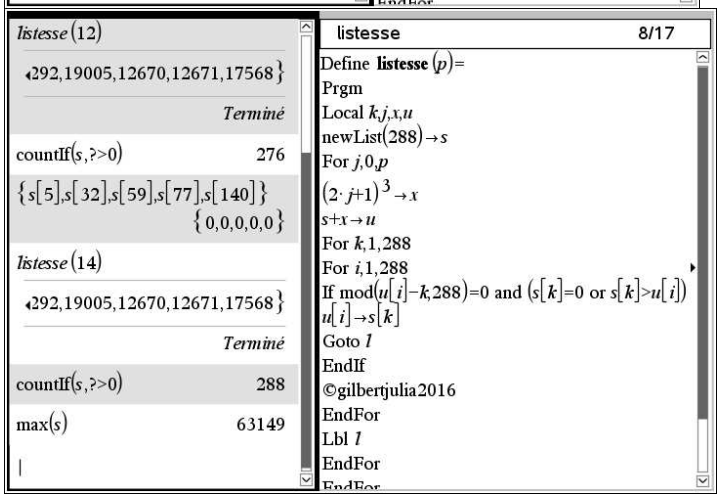
On reconnaît notamment la même liste **s** que celle obtenue précédemment avec les douze premiers entiers impairs. Il y a toujours 12 manquants.

En considérant les 14 premiers entiers impairs (donc les entiers impairs de 1 à 29), l'objectif recherché est finalement atteint.

Avec cette méthode, on obtient une liste s dont le plus grand élément est $m = 63149_{\text{gjulia2016}}$.
Il ne s'agit pas là nécessairement d'une liste « minimale ».



Ci-contre, le programme a été légèrement modifié. La condition de remplacement d'un terme de la liste **s** par un terme de la liste **u** est « $s[k]>0$ **or** $s[k]>u[i]$ ». De la sorte, si l'on obtient un nombre $u[i]$ convenable plus petit qu'un terme $_{\text{gjulia2016}}$ de la liste **s** déjà obtenu, le remplacement est effectué, ce qui n'était pas le cas précédemment (par exemple le dernier terme est 17568 au lieu de 19872).
Cette optimisation ne change cependant pas la valeur du plus grand élément de la liste.



Pour information, la liste *s* ainsi obtenue commence ainsi :

{1, 3746, 7203, 35140, 49253, 16998, 5767, 5768, 7785, gjulia2016 9514, 12683, 18444, 22765, 28526, 28527, 1456, 881, 882, 2323, 4628, 6645, 18166, 21911, 19032, 12697, 12698, 27, 28, 7229, 7230, 35167, 51584, 6369, 5794, 5795, 7236, 8101, gjulia2016 11558, 19047, 22792, 28553, 28554, 1483, …}

Son plus grand élément est $m = 63149$

3. Quelques pistes pour les questions suivantes

4. Soit *x* un entier tel que $m + u_1 \le x \le 288n + u_1$.

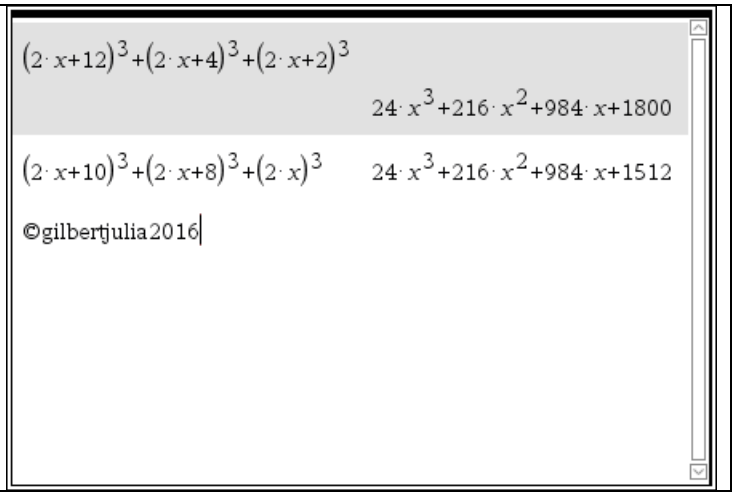
Il existe q et r : $x - u_1 = 288q + r$ gjulia2016 avec $1 \le r \le 288$ (attention, ce n'est pas la division euclidienne). Parmi les entiers s_i, il en existe un qui est congru à *r* modulo 288 …

5.1. Regarder dans la liste obtenue avec **sumcubpair(4)**

5.2. L'écran ci-contre justifie la relation admise.

De cette façon, quel que soit l'entier *p* pair :
$(p+12)^3 + (p+4)^3 + (p+2)^3 =$
$(p+10)^3 + (p+8)^3 + p^3 + 288$.

On note que tous les cubes figurant dans cette relation sont des cubes d'entiers pairs.



Faire une récurrence sur la longueur *n* de la progression géométrique.

6.1. On a vu que l'entier *m* pouvait être choisi de sorte que $m = 63149$.
On peut ainsi choisir $k = 20$ et utiliser une progression arithmétique de 632 termes appartenant tous à S_0.
Montrer l'existence d'un entier *N* tel que tout entier de $[N\,;N+118638]$ est décomposable en somme de cubes distincts.

6.2. Si on pose : $N_p = N + 39^3 + \sum_{j=20}^{j=p} (2j-1)^3$ on construit successivement les entiers :

$N_{20} = N + 118638$; julia2016 $N_{21} = N + 187559$; $N_{22} = N + 267066$; $N_{23} = N + 358191$; ..... …

Montrer que tout entier de $[N_{20}\,;N_{21}]$ est somme d'un élément de $[N\,;N_{20}]$ et d'un nouveau cube d'entier impair. Itérer.