Concours Général 2015. Eléments de correction

Auteur du document : Gilbert JULIA

Problème 1 : petits poids.

Ce premier problème du concours général 2015 nous invite à suivre les pas de Clara et d'Isabelle, deux mathématiciennes en herbe soucieuses de minimiser le « poids » d'une suite.

Isabelle considère toutes les permutations[1] *possibles de n réels* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
La méthode exhaustive d'Isabelle permet de repérer à coup sûr le plus petit élément de l'ensemble des poids des $n!$ *permutations de* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *et de déterminer toutes les suites dont le poids est égal à ce poids minimal. Mais cette méthode devient rapidement très coûteuse (déjà 5040 permutations pour* $n = 7$ *).*

Clara, plus pressée paraît-il, exécute un algorithme lui permettant de déterminer une seule suite dont le poids n'est « pas très grand ». Elle n'a cependant pas la garantie de trouver le poids minimal. L'objet du problème est justement d'évaluer la qualité de la méthode de Clara.

Le poids d'une suite finie $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de n réels est défini par : $\mathbf{pds}(x) = \max\limits_{k=1,...,n}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} x_i\right|\right)$.

Trois remarques préalables :

- Si les nombres x_i sont tous de même signe, alors $|x_1| \le |x_1 + x_2| \le ... \le |x_1 + ... + x_n|$. La suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a pour poids $|x_1 + ... + x_n|$, et une modification de l'ordre des termes n'en change pas le poids. Le problème n'a pas d'intérêt dans un tel cas.
- La suite « opposée » $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ d'une suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donnée a le même poids que la suite x car : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} : |-x_1 - ... - x_i| = |-(x_1 + ... + x_i)| = |x_1 + ... + x_i|$
- Etant donnée une suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, si l'on change l'ordre des termes (soit σ la permutation associée), le terme de plus grande valeur absolue ne change pas (i.e. $\max\limits_k |x_{\sigma(k)}| = \max\limits_k |x_k|$) et la somme des termes $|x_{\sigma(1)} + ... + x_{\sigma(n)}|$ ne change pas non plus (i.e. $|x_{\sigma(1)} + ... + x_{\sigma(n)}| = |x_1 + ... + x_n|$).

[1] Une « permutation » de la suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est une suite formée des mêmes réels $x_1, x_2, ..., x_n$ mais ordonnés dans un ordre différent. Par exemple $(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1)$ sont les six permutations de la suite $(1, 2, 3)$.
On peut expliciter une permutation de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ à l'aide d'une bijection $i \mapsto \sigma(i)$ de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ des indices sur lui-même : $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$

1.1. Le poids de la suite $x = (3, 5, -6, -8, 2)$ est le plus grand des nombres : $|3|$; $|3+5| = 8$; $|3+5-6| = 2$; $|3+5-6-8| = 6$; $|3+5-6-8+2| = 4$
Le poids de cette suite est égal à 6.

On obtient un poids plus petit en réordonnant par exemple ainsi : $x_r = (3, -6, 2, 5, -8)$
Le poids de cette suite réordonnée est le plus grand des nombres :
$|3|$; $|3-6| = 3$; $|3-6+2| = 1$; $|3-6+2+5| = 4$; $|3-6+2+5-8| = 4$.
Ce poids est égal à 4.

1.2. Dans le cas de la suite $x = (1, 2, ..., 2015, -2015, ..., -2, -1)$, la somme des k premiers termes augmente tant qu'on considère des termes de signe positif (donc jusqu'au 2015ème terme) et diminue ensuite. La plus grande de ces sommes est $1 + 2 + ... + 2015 = \frac{2015 \times 2016}{2} \underset{gj}{=} 2031120$
Le poids de cette suite est 2031120

On obtient un poids plus petit si on alterne des termes de signe différents : $x_r = (1, -1, 2, -2, ..., 2015, -2015)$. En effet, la somme des premiers termes est nulle si on considère un nombre pair de termes et égale au dernier terme écrit si on considère un nombre impair de termes. La plus grande des sommes obtenues est 2015, c'est le poids de la suite ainsi réordonnée.

2.1. Il y a six permutations possibles :
$(1, 2, -4)$, $(2, 1, -4)$, $(1, -4, 2)$, toutes trois de poids 3 ; $(2, -4, 1)$ de poids 2, $(-4, 1, 2)$, $(-4, 2, 1)$ toutes deux de poids 4.

La permutation de plus petit poids est la permutation $(2, -4, 1)$ dont le poids est 2.

Clara construit quant à elle une permutation dont le premier terme est 1. Ensuite, elle a le choix entre 2 et -4. Elle peut considérer aussi bien la permutation $(1, 2, -4)$ que la permutation $(1, -4, 2)$. Dans les deux cas, le poids est égal à 3.

Conclusion : $I = 2$; $C = 3$

2.2. Il y a 24 permutations possibles. Parmi elles, deux ont pour poids 1, le poids minimal nécessairement, ce sont les permutations $(1, -2, 2, -1)$ et $(-1, 2, -2, 1)$.

Quant à Clara, elle construit une permutation dont les deux premiers termes sont 1 et -1, dans un ordre quelconque, et les deux derniers 2 et -2 dans un ordre quelconque. Elle obtient l'une ou l'autre des quatre permutations $(1, -1, 2, -2)$; $(1, -1, -2, 2)$; $(-1, 1, 2, -2)$; $(-1, 1, -2, 2)$, toutes de poids 2.

Conclusion : $I = 1$; $C = 2$

3. Cas $n = 2$.

Remarque préalable : De façon générale, soit *a, b, c* trois réels positifs tels que $a \leq b$.
Alors, $\max(a, c) \leq \max(b, c)$. En effet :

- Si $b \leq c$, alors $\max(a, c) = \max(b,c) = c$.
- Si $a \leq c \leq b$, alors $\max(a, c) = c \leq \max(b,c) = b$
- Si $c \leq a$, alors $\max(a, c) = a \leq \max(b,c) = b$

NB. Cette propriété s'étend au cas de quatre réels positifs *a, b, c, d* : $a \leq b \Rightarrow \max(a, c, d) \leq \max(b, c, d)$.
En effet, $\max(a, c, d) = \max(a, \max(c, d))$ et $\max(b, c, d) = \max(b, \max(c, d))$; on applique dès lors l'inégalité obtenue ci-dessus. Nous aurons à utiliser cette inégalité portant sur quatre nombres positifs dans la résolution de la question **4**.

Elle pourrait être généralisée : $a, b, c_1,..., c_k$ étant positifs, $a \leq b \Rightarrow \max(a, c_1,..., c_k) \leq \max(b, c_1,..., c_k)$

Soit maintenant $x = (x_1, x_2)$ une suite de 2 réels. Il y a deux permutations possibles, (x_1, x_2) et (x_2, x_1), de poids respectifs $pds(x_1, x_2) = \max(|x_1| ; |x_1 + x_2|)$; $pds(x_2, x_1) = \max(|x_2| ; |x_1 + x_2|)$.

Clara choisit celle qui commence par le nombre de plus petite valeur absolue. D'après ce qui précède, c'est celle qui a le plus petit poids. Donc $C = I$

4. Cas $n = 3$

Si les trois nombres sont de même signe, alors toutes les permutations ont le même poids, la valeur absolue de la somme des trois nombres : $I = C$.

Le cas « intéressant » est celui où l'un des nombres est du signe contraire à celui des deux autres.

Sans diminuer la généralité, on peut supposer que l'un est négatif et les deux autres positifs (quitte à changer tous les signes).

À cet effet, soient x, y, z trois réels positifs et tels que $y \leq z$. Considérons les six permutations de $\{-x, y, z\}$ et discutons suivant les valeurs de *x* relativement à *y* et à *z*, quelles sont les valeurs de *C* et de *I*.

Commençons par exprimer les poids de ces six permutations :

$p_1 = pds(-x, y, z) = \max(x, |y - x|, |y + z - x|)$; $p_2 = pds(-x, z, y) = \max(x, |z - x|, |y + z - x|)$

$p_3 = pds(y, -x, z) = \max(y, |y - x|, |y + z - x|)$; $p_4 = pds(y, z, -x) = \max(y, y + z, |y + z - x|)$

$p_5 = pds(z, -x, y) = \max(z, |z - x|, |y + z - x|)$; $p_6 = pds(z, y, -x) \underset{gj}{=} \max(z, y + z, |y + z - x|)$

Compte tenu de l'hypothèse $0 \leq y \leq z$: $p_6 \geq p_4$ quelles que soient les valeurs de *x, y, z* en vertu de la remarque NB notée en question **3**. Il n'y aura pas à prendre en compte dans la recherche de *I* la sixième permutation. D'autre part, ni la cinquième ni la sixième permutation ne seront utilisées par Clara.

Remarquons d'abord que si $0 \le x \le z$ alors : $y - z \le y - x \le y$ et $y \le y + z - x \le y + z$.

En conséquence : $p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = y + z - x$ et $p_4 = y + z$.

- Si $x \le y$, Clara obtient la première permutation $(c_1, c_2, c_3) \underset{gj}{=} (-x, y, z)$;
- Si $y \le x \le z$, Clara obtient la troisième permutation $(c_1, c_2, c_3) = (y, -x, z)$.

Dans ces deux cas : $C = I = y + z - x$.

Il reste à étudier ce qu'il se passe lorsque $x \ge z$

Les expressions des divers poids deviennent :
$p_1 = pds(-x, y, z) = \max(x, x - y|y + z - x|)$; $p_2 = pds(-x, z, y) = \max(x, x - z, |y + z - x|)$
$p_3 = pds(y, -x, z) = \max(y, x - y, |y + z - x|)$; $p_4 = pds(y, z, -x) = \max(y, y + z, |y + z - x|)$
$p_5 = pds(z, -x, y) \underset{gj}{=} \max(z, x - z, |y + z - x|)$;

$y \le x \Rightarrow p_3 \le p_1$ en vertu de la remarque NB notée en question **3**.
Pour la même raison, $z \le x \Rightarrow p_5 \le p_2$

Seuls p_3, p_4, p_5 sont à considérer pour déterminer I.

Occupons nous d'abord de $p_5 = \max(z, x - z, |y + z - x|)$.

Lorsque $z \le x \le 2z$, le plus grand des deux nombres z et $x - z$ est le nombre z.
D'autre part, $y - z \le y + z - x \le y$ et *a fortiori* $-z \le y + z - x \le z$, le plus grand des deux nombres $|y + z - x|$ et z est le nombre z. Dans ce cas, $p_5 = z$

Lorsque $x \ge 2z$, le plus grand des deux nombres z et $x - z$ est le nombre $x - z$.
D'autre part, $|y + z - x| = x - y - z \le x - z$. Dans ce cas, $p_5 = x - z$

Occupons nous maintenant de p_3 et p_4, qui intéressent plus particulièrement Clara. Les ensembles dont ils sont les plus grands éléments ont deux éléments en commun : y et $|y + z - x|$. L'ordre de rangement de p_3 et p_4 dépend de celui de $x - y$ et $y + z$, c'est-à-dire du signe de $x - 2y - z$, ce qui nous amène à distinguer deux cas :

Premier cas : $z \le x \le 2y + z$.
Alors $x - y \le y + z$ et $p_3 \le p_4$. Le poids minimal se jouera entre p_3 et p_5.

Clara obtient $(c_1, c_2, c_3) = (y, -x, z)$, la troisième permutation car $0 \le x - y \le y + z$.
$C = p_3 = \max(y, x - y, |y + z - x|)$. Or : $-y = y + z - (2y + z) \underset{gj}{\le} y + z - x < y + z - z = y$
Ce qui implique que $|x - z - y| \le y$ donc que $C = p_3 = \max(y, x - y)$.

Les valeurs relatives de y et de z entrent en jeu. Si y et z sont tels que $z \le 2y$ et que en outre $z \le x \le 2y$, alors $C = p_3 = y = I$ (plus performant que $p_5 = z$) et sinon $C = p_3 = x - y$

Deuxième cas : $x > 2y + z$, alors $x - y > y + z$ et $p_3 \geq p_4$. Le poids minimal se jouera entre p_4 et p_5.

Clara obtient $(c_1, c_2, c_3) = (y, z, -x)$, la quatrième permutation.
$C = p_4 = \max(y, y+z, x-y-z) = \max(y+z, x-y-z)$.

- Si $2y + z \leq x \leq 2y + 2z$, alors $C = p_4 = y + z$.
- Si $x \geq 2y + 2z$ alors $C = p_4 = x - y - z$ (on retrouve la valeur absolue de la somme des termes).

Il se détache deux situations dans lesquelles $I = p_5 \leq C$.

$2z \leq x \leq 2y + z$	$2y + z \leq 2z \leq x \leq 2y + 2z$
$C = x - y$	$C = y + z$
$I = p_5 = x - z$	$I = p_5 = x - z$

La première se produit lorsque $z \leq 2y$. Dans ce cas : $C \leq (2y + z) - y \leq 3y$ tandis que $p_5 \geq 2z - z \geq 2y$. On obtient : $\frac{C}{p_5} \leq \frac{3y}{2y} = \frac{3}{2}$.

La deuxième se produit lorsque $z \geq 2y$. Dans ce cas : $C \leq \frac{3z}{2}$ tandis que $p_5 \geq 2z - z = z$. On obtient : $\frac{C}{p_5} \leq \frac{3z}{2z} = \frac{3}{2}$.

Dans tous les cas, $C \leq \frac{3I}{2}$

5.1. $|x_1 + ... + x_n| \leq pds(x_1, x_2, ..., x_n)$ quelle que soit la suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ considérée car le nombre $S = |x_1 + x_2 + ... + x_n|$ appartient à l'ensemble des réels dont le poids de la suite est le plus grand élément.

Une permutation des termes de la suite $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ne changeant pas la valeur de la somme des termes, S est inférieur ou égal au poids de toutes les permutations de $(x_1, x_2, ..., x_n)$, en particulier au poids de celle(s) de poids minimal : $S \leq I$.

5.2. Soit une suite $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que l'on peut supposer rangée de façon que $M = |x_n|$.
D'après la définition de I : $|x_1 + ... + x_{n-1}| \leq I$ et $|x_1 + ... + x_{n-1} + x_n| \leq I$

$$\begin{cases} |x_1 + ... + x_{n-1}| \leq I \Rightarrow -I \leq -(x_1 - ... + x_{n-1}) \leq I \\ |x_1 + ... + x_{n-1}| \leq I \Rightarrow -I \leq x_1 + ... + x_{n-1} + x_n \leq I \end{cases}.$$

En ajoutant membre à membre les deux doubles inégalités : $-2I \leq x_n \leq 2I$ et par conséquent $M = |x_n| \leq 2I$.

5.3. Puisque toutes les permutations d'une suite ont une même somme de termes, on peut considérer d'emblée une suite $(x_1, x_2,..., x_n)$ déjà ordonnée selon la méthode de Clara.

On suppose que $C > M$ c'est-à-dire qu'il existe au moins un indice $j \geq 1$: $|x_1 + x_2 + ... + x_j + x_{j+1}| > M$ (il faut au moins deux termes pour dépasser *M*).
On considère le plus petit de ces indices : $|x_1 + x_2 + ...x_j + x_j| \leq M$ et $|x_1 + x_2 + ...x_j + x_{j+1}| > M$. De la sorte, x_{j+1} est nécessairement non nul.

Par définition de x_{j+1}, pour tout indice *k* tel que $j+1 \leq k \leq n$: $|x_1 + x_2 + ...x_j + x_k| \geq |x_1 + x_2 + ...x_j + x_{j+1}|$.
Donc, pour tout indice *k* tel que $j+1 \leq k \leq n$: $|x_1 + x_2 + ...x_j + x_k| >_{gj} M$.

La somme $(x_1 + x_2 + ...x_j)$ ne peut être nulle (on aurait $|x_k| > M$, en contradiction avec la définition de *M*).
Pour un tel indice : ou bien $x_k > M - (x_1 + x_2 + ...x_j)$ ou bien $x_k < -M - (x_1 + x_2 + ...x_j)$.

Si $(x_1 + x_2 + ...x_j) > 0$, alors la deuxième éventualité est à rejeter (on aurait $|x_k| > M$) , seule l'éventualité $x_k \geq 0$ est possible.

Si $(x_1 + x_2 + ...x_j) < 0$, alors la première éventualité est à rejeter (on aurait $|x_k| > M$) , seule l'éventualité $x_k < 0$ est possible.
Ainsi $x_{j+1},...,x_n$ sont tous strictement du même signe, celui de $(x_1 + x_2 + ...x_j)$. Il s'ensuit que $|(x_1 + x_2 + ...x_j) + x_{j+1}| < |(x_1 + x_2 + ...x_j) + x_{j+1} + x_{j+2}| <_{gilbertjulia} |(x_1 + x_2 + ...x_j) + x_j + ... + x_n| = S$

On obtient dans ce cas que $C = S$.

Ou bien $C \leq M$, ou bien $C = S$ et donc $C \leq \max(M, S)$

5.4. *M* et *S* étant tous deux inférieurs ou égaux à $2I$, $\max(M, S) \leq 2I$; *a fortiori* $C \leq 2I$.

5.5. Pour un nombre pair de termes, la suite : $(1, -1, 2, -2, 2^2, -2^2, ..., 2^p, -2^p)$ convient.

C'est une suite de Clara de poids 2^p , mais la suite réorganisée $(2^{p-1}, -2^p, 2^p, -2^{p-1}, 2^{p-2}, -2^{p-2}, ...)$ est de poids 2^{p-1}. On a ainsi obtenu une suite réorganisée dont le poids est inférieur ou égal à $\dfrac{C}{2}$.
En vertu de **5.4**, on ne peut faire mieux. Dans le cas de cette suite : $C = 2I$

Problème 2 : Tétraèdres.

Ce problème porte sur certaines propriétés des tétraèdres. On y apprend qu'un tétraèdre possède un centre de gravité, une sphère circonscrite mais qu'en revanche ses hauteurs peuvent ne pas être concourantes. (Quand elles le sont, le tétraèdre est dit « orthocentrique »).

1. Prérequis

La question **1** de ce problème porte sur la notion de *barycentre*, une application majeure de l'outil du calcul vectoriel qui, dans sa généralité, ne figure plus dans les programmes du lycée.

On considèrera cependant comme prérequises les notions suivantes :

1. La caractérisation vectorielle du milieu d'un segment $[AB]$: le milieu I du segment $[AB]$ est l'unique point de l'espace tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
2. Sa propriété vectorielle fondamentale : pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$
3. La caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle ABC : le centre de gravité G d'un triangle ABC est l'unique point de l'espace tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
4. Sa propriété vectorielle fondamentale : pour tout point M de l'espace : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

La question **2** est en rapport avec la notion de *plan médiateur* d'un segment de l'espace.

Etant donnés deux points distincts A et B de l'espace, un point M est équidistant de A et de B, c'est-à-dire est tel que $MB=MA$, si et seulement si la relation $MB^2-MA^2=0$ est vérifiée.

Or pour tout point M de l'espace : $MB^2-MA^2=\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right).\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\right)$

- D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$
- I désignant le milieu du segment $[AB]$: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MI}$ d'après la propriété fondamentale associée au milieu d'un segment.

Donc, pour tout point M de l'espace : $MB^2-MA^2=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MI}$.

Ainsi : $MB^2-MA^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MI}=0$

La nullité de ce produit scalaire caractérise l'appartenance de M au plan passant par le milieu I du segment $[AB]$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ Ce plan, passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$, est le *plan médiateur* du segment $[AB]$, ensemble des points équidistants de A et de B.

2. Eléments de correction

1.1. On peut tenter de situer le(s)point(s) solution(s) par rapport à l'un des points *A, B, C* ou *D* (*A* par exemple).

Par application de la relation de Chasles, pour tout point *M* de l'espace :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)=4\overrightarrow{MA}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$

On obtient : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

Les points *A, B, C, D* étant non coplanaires, les trois vecteurs $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right)$ sont indépendants. Tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs et la relation vectorielle précédente détermine un point et un seul.

Il existe un unique point, noté désormais *G*, vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; ce point est déterminé par la relation vectorielle : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=_{gilbertjulia}\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1.2. Soit G_A le centre de gravité du triangle *BCD*.

En appliquant la propriété vectorielle fondamentale du centre de gravité d'un triangle : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG_A}$ et par suite : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG_A}$

1.3. Les points *A, B, C, D* étant supposés non coplanaires, *A* est extérieur au plan (*BCD*) et les points *A* et G_A sont des points distincts, ce qui légitime la définition de la droite (AG_A).

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG_A}$ étant colinéaires, les points *A, G,* G_A sont des points alignés : *G* appartient à la médiane (AG_A).

Soient G_B, G_C et G_D les centres de gravité des faces opposées, respectivement, aux sommets *B, C* et *D*.

La relation définissant *G* étant invariante par toute permutation des lettres *A, B, C, D* on obtient sans nouvelle démonstration trois autres relations vectorielles analogues à celle que l'on vient d'obtenir avec G_A :
$\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BG_B}$; $\overrightarrow{CG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG_C}$ et $\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_D}$

Ces relations de colinéarité situent le point *G* sur chacune des trois autres médianes du tétraèdre, (BG_B), (CG_C) et (DG_D).

Les quatre médianes du tétraèdre concourent au point *G*.

2. L'existence d'une sphère circonscrite au tétraèdre équivaut à l'existence d'un point O équidistant de ses quatre sommets.

Si un tel point existe, il devrait appartenir à chacun des plans médiateurs des six arêtes. C'est pourquoi on va s'intéresser à certaines intersections, deux à deux, de ces plans.

Soient P_{AB} et P_{AC} les plans médiateurs des arêtes $[AB]$ et $[AC]$ du tétraèdre.

Les points A, B, C, D étant supposés non coplanaires, les points A, B, C ne sont pas alignés et les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Donc les plans P_{AB} et P_{AC}, qui admettent respectivement $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal, ne sont pas parallèles. Ils sont sécants suivant une droite.

Un point M appartient à cette droite intersection de P_{AB} et P_{AC} si et seulement si : gilbertjulia $\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si $MA = MB = MC$.

Du fait que ses points sont équidistants de B et de C, Δ_{ABC} est aussi incluse dans P_{BC}, le plan médiateur de $[BC]$.

Cette droite, que l'on va noter désormais Δ_{ABC} , est l'ensemble des points équidistants des points A, B et C. Elle passe par le centre du cercle tracé dans le plan (ABC) circonscrit au triangle ABC (du fait que ce point est équidistant des sommets du triangle), et elle est perpendiculaire au plan (ABC) (puisque sa direction est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$). On l'appelle *l'axe médiateur* du triangle ABC.

On définit de même l'axe médiateur du triangle ABD : $\Delta_{ABD} = P_{AB} \cap P_{AD}$, intersection des plans médiateurs de $[AB]$ et $[AD]$.

Les deux droites Δ_{ABC} et Δ_{ABD} sont non parallèles car orthogonales à deux plans sécants. Elles sont de plus coplanaires, toutes deux incluses dans le plan P_{AB}. Elles sont donc sécantes.

Soit O leur point d'intersection. Ce point vérifie la relation $OA = OB = OC$ car il appartient à Δ_{ABC} et la relation $OA = OB = OD$ car il appartient à Δ_{ABD} , il est équidistant des quatre sommets du tétraèdre.

O appartient de ce fait aux axes médiateurs des deux autres faces Δ_{BCD} et Δ_{ACD} (les quatre axes médiateurs concourent en O).

Réciproquement, si une sphère passe par les quatre sommets du tétraèdre, son centre est équidistant des points A, B, C, D. Ce centre est dans chacun des plans médiateurs P_{AB} , P_{AC} et P_{AD} : il s'agit nécessairement du point O, seul point commun à ces trois plans. Cette sphère passant par A a pour rayon OA : il s'agit de la sphère S.

Il existe une unique sphère passant par chacun des quatre sommets du tétraèdre, dont le centre est l'unique point O de l'espace vérifiant $OA = OB = OC = OD$

3.2. Les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas nécessairement concourantes.

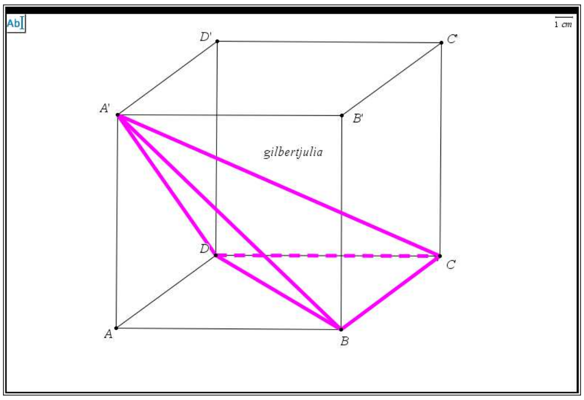
Pour le prouver, on peut proposer un contre-exemple d'un tétraèdre dont les hauteurs ne sont pas concourantes.

ABCDA'B'C'D' étant un cube, on considère le tétraèdre *A'BCD*.

($A'A$) est la hauteur issue de A'.

La hauteur issue de B est une droite du plan passant par B et orthogonal à (CD), c'est à dire une certaine droite du plan de la face $BCC'B'$.

(AA') est strictement parallèle à ce plan. Les deux hauteurs issues de *A'* et de *B* sont non coplanaires donc non sécantes. Les hauteurs de ce tétraèdre ne concourent pas.



3.1 et 3.3. Etudions le cas du tétraèdre régulier.

Les quatre faces d'un tel tétraèdre sont des triangles équilatéraux et les quatre sommets appartiennent à l'axe médiateur de la face opposée.

Puisque les faces *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC* sont des triangles équilatéraux, leurs centres de gravité sont aussi centres de leurs cercles circonscrits et appartiennent à leur axe médiateur. La médiane issue d'un sommet donné est aussi l'axe médiateur de la face opposée. En tant qu'axe médiateur, cette médiane est perpendiculaire à la face opposée. C'est également une hauteur.

Il en résulte que si *ABCD* est un tétraèdre régulier, alors quel que soit le sommet considéré, hauteur et médiane qui en sont issues ainsi qu'axe médiateur de la face opposée sont une seule et même droite.
Les points *G* et *O* sont un seul et même point où concourent les quatre medianes-hauteurs-axes-médiateurs.

Il reste à étudier les réciproques …

3.1. Considérons un tétraèdre dont les hauteurs concourent en *O*.

De façon générale, chaque hauteur du tétraèdre, étant perpendiculaire à la face opposée au sommet dont elle issue, est une droite parallèle à l'axe médiateur de cette face. Si de plus cette hauteur passe par *O* alors les deux droites en question sont confondues puisque parallèles et ayant un point commun.

Si les quatre hauteurs concourent en *O*, alors chaque hauteur est aussi l'axe médiateur de la face opposée : le sommet dont elle est issue est équidistant des trois autres sommets du tétraèdre.

Il suffit dès lors de considérer trois des hauteurs, par exemple h_A, h_B, h_C, hauteurs issues de *A, B* et *C* :

- *A* est équidistant des trois autres sommets : $AB = AC = AD$
- *B* est équidistant des trois autres sommets : $BC = BD = BA$
- *C* est équidistant des trois autres sommets : $CD = CA = CB$

Ce qui implique que $AB = AC = AD = BC = BD = CD$, les six arêtes ont même longueur, le tétraèdre est régulier. La réciproque de **3.1** est établie.

(On note qu'il est suffisant que trois quelconques des quatre hauteurs concourent en O pour que la quatrième concoure aussi en O et que le tétraèdre soit régulier).

3.3. Considérons un tétraèdre dont les hauteurs concourent en G c'est-à-dire dont les médianes sont aussi les hauteurs.

Les droites (AG_A) ; (BG_B) ; (CG_C) ; (DG_D) sont, en qualité de hauteurs, perpendiculaires, respectivement, aux faces *BCD, CDA, DAB, ABC* du tétraèdre.

Etudions le statut des points G_A, G_B, G_C et G_D.

- La droite (AG_A) étant perpendiculaire au plan (BCD), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (CD) et à (BD)
- La droite (BG_B) étant perpendiculaire au plan (CDA), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (CD).
- La droite (CG_C) étant perpendiculaire au plan (DAB), elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (BD).

(CD) étant orthogonale aux deux droites sécantes (AG_A) et à (BG_B) du plan (ABG) est perpendiculaire à ce plan. Elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (BG_A).

- $(BG_A)\perp(CD)$: (BG_A) est une hauteur du triangle *BCD*.

(BD) étant orthogonale aux deux droites sécantes (AG_A) et à (CG_C) du plan (ACG) est perpendiculaire à ce plan. Elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à (CG_A).

- $(CG_A)\perp(BD)$: (CG_A) est une hauteur du triangle *BCD*.

Le point G_A appartenant à deux hauteurs du triangle *BCD*, il s'agit de l'orthocentre de ce triangle.

On montrerait de la même façon que G_B, G_C et G_D sont orthocentres, respectivement, de *CDA, DAB, ABC*.

Or, un triangle dont le centre de gravité est confondu avec l'orthocentre est un triangle équilatéral. Les faces du tétraèdre sont des triangles équilatéraux et le tétraèdre est régulier. La réciproque de **3.3** est établie.

4.1. Les quatre droites non coplanaires Δ_j, pour $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ concourent en H.

Soit un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ (donc quatre points non coplanaires) tel que pour $j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, la hauteur issue de A_j est la droite Δ_j.

$A_1A_2A_3A_4$ étant supposé être un tétraèdre, les points A_1, A_2, A_3, A_4 sont par hypothèse non coplanaires.
Cherchons à quelle condition le point H appartient

H appartient à chacune des droites Δ_j si et seulement si pour chaque indice j les vecteurs $\overrightarrow{HA_j}$ et $\overrightarrow{u_j}$ sont colinéaires c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel x_j tel que $\overrightarrow{HA_j} = x_j\,\overrightarrow{u_j}$.

En tant que hauteur issue de A_1, la droite Δ_1 est perpendiculaire au plan $(A_2A_3A_4)$.

Ce plan admet comme paire de vecteurs directeurs la paire $\overrightarrow{A_2A_3}\ ;\ \overrightarrow{A_3A_4}$, vecteurs indépendants puisque A_2, A_3 et A_4 ne sont pas alignés.

Une condition nécessaire et suffisante pour que Δ_1 soit perpendiculaire au plan $(A_2A_3A_4)$ est que le vecteur $\overrightarrow{u_1}$, directeur de cette droite, soit orthogonal aux deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{A_2A_3}\ ;\ \overrightarrow{A_3A_4}$ du plan $(A_2A_3A_4)$. C'est-à-dire que : $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_2A_3} = 0\\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_2A_4} = 0\end{cases}$.

Or : $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{HA_3} - \overrightarrow{HA_2} = x_3\,\overrightarrow{u_3} - x_2\,\overrightarrow{u_2}$ et de même : $\overrightarrow{A_2A_4} = \overrightarrow{HA_4} - \overrightarrow{HA_2} = x_4\,\overrightarrow{u_4} - x_2\,\overrightarrow{u_2}$

Les relations $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_2A_3} = 0\\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_2A_4} = 0\end{cases}$ équivalent à : $\begin{cases}\overrightarrow{u_1}.\left(x_3\overrightarrow{u_3} - x_2\,\overrightarrow{u_2}\right) = 0\\ .\overrightarrow{u_1}.\left(x_4\overrightarrow{u_4} - x_2\,\overrightarrow{u_2}\right) = 0\end{cases}$ soit à : $\begin{cases}x_3\,c_{13} - x_2\,c_{12} = 0\\ x_4\,c_{14} - x_2\,c_{12} = 0\end{cases}$.

Ainsi, Δ_1 est perpendiculaire au plan $(A_2A_3A_4)$ si et seulement si $\begin{cases}x_3\,c_{13} - x_2\,c_{12} = 0 & (1)\\ x_4\,c_{14} - x_2\,c_{12} = 0 & (2)\end{cases}$.

On procède de même pour chacune des autres hauteurs :

- Δ_2 perpendiculaire au plan $(A_3A_4A_1)$ équivaut à $\begin{cases}x_4\,c_{24} - x_3\,c_{23} = 0 & (3)\\ x_1\,c_{21} - x_3\,c_{23} = 0 & (4)\end{cases}$.
- Δ_3 perpendiculaire au plan $(A_4A_1A_2)$ équivaut à $\begin{cases}x_1\,c_{31} - x_4\,c_{34} = 0 & (5)\\ x_2\,c_{32} - x_4\,c_{34} = 0 & (6)\end{cases}$
- Δ_4 perpendiculaire au plan $(A_1A_2A_3)$ équivaut à $\begin{cases}x_2\,c_{42} - x_1\,c_{41} = 0 & (7)\\ x_3\,c_{43} - x_1\,c_{41} = 0 & (8)\end{cases}$

(NB. On note que par symétrie du produit scalaire : $c_{ij} = c_{ji}$, l'ordre des deux indices est sans importance)

(1) et une combinaison $(8)-(7)$ fournissent : $\begin{cases} x_3\, c_{13} - x_2\, c_{12} = 0 \\ x_3\, c_{43} - x_2\, c_{42} = 0 \end{cases} \quad (S1)$

(5) et une combinaison $(4)-(3)$ en fournissent : $\begin{cases} x_1\, c_{31} - x_4\, c_{34} = 0 \\ x_1\, c_{21} - x_4\, c_{24} = 0 \end{cases} \quad (S2)$

Considérés comme systèmes de deux relations entre x_1 et x_2 , ces systèmes ont, au signe près, le même déterminant : $c_{13}\, c_{42} - c_{12} c_{43}$.

On peut combiner autrement ces relations :

(3) et une combinaison $(2)-(1)$ fournissent : $\begin{cases} x_4\, c_{24} - x_3\, c_{23} = 0 \\ x_4\, c_{14} - x_3\, c_{13} = 0 \end{cases} \quad (S3)$

(7) et une combinaison $(6)-(5)$ en fournissent : $\begin{cases} x_2\, c_{42} - x_1\, c_{41} = 0 \\ x_2\, c_{32} - x_1\, c_{31} = 0 \end{cases} \quad (S4)$

Ces deux systèmes ont le même déterminant : $c_{13}\, c_{24} - c_{14} c_{23}$.

L'existence d'un tétraèdre convenable, selon l'hypothèse en vigueur, suppose que le système des huit équations a quatre inconnues a une solution $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$. Un au plus des quatre nombres peut être nul car H ne peut être confondu avec deux sommets à la fois. Les systèmes 2×2 obtenus doivent avoir des solutions non nulles.

Puisque ces systèmes ont des solutions non nulles, leurs déterminants sont nuls :
$c_{13}\, c_{42} - c_{12} c_{43} = 0$ et $c_{13}\, c_{24} - c_{14} c_{23} = 0$

En conséquence : $c_{13}\, c_{42} = c_{12}\, c_{43} = c_{14}\, c_{23}$

C'est-à-dire, compte tenu du fait que $c_{ij} = c_{ji}$ pour tous indices i et j : $c_{13}\, c_{24} = c_{12}\, c_{34} = c_{14}\, c_{23}$ conformément à l'énoncé.

2. Réciproquement, si $c_{12} c_{34} = c_{41}\, c_{23} = c_{13} c_{24} \neq 0$, alors les systèmes 2×2 précédents, ont tous un déterminant nul et une infinité de solutions compatibles. De plus, les c_{ij} sont tous non nuls.

On peut exprimer les x_i en fonction de l'un d'entre eux, par exemple de $x_1 = \lambda$ (non nul) :

$x_1 = \lambda$; $x_2 = \dfrac{c_{14}}{c_{24}} \lambda = \dfrac{c_{13}}{c_{23}} \lambda$; $x_3 = \dfrac{c_{14}}{c_{34}} \lambda =$; $x_4 = \dfrac{c_{13}}{c_{34}} \lambda$. Ces réels sont tous non nuls.

Ces relations étant vérifiées, en posant $\overrightarrow{HA_i} = x_i\, \overrightarrow{u_i}$; $i = 1,2,3,4$ on construit quatre points A_i, un sur chaque droite et tous distincts de H, tels que les relations vectorielles $\begin{cases} \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_2 A_3} = 0 \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{A_3 A_4} = 0 \end{cases}$, etc … sont vérifiées.

Les droites (HA_j) pour $j = 1, 2, 3, 4$ sont perpendiculaires aux faces opposées, ce sont les hauteurs du tétraèdre.

Il existe une infinité de tétraèdres (qui se déduisent les uns des autres par homothéties de centre H) tels que $A_j \in \Delta_j$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et dont les hauteurs concourent en H

Remarque.

On peut regarder au passage ce qu'il se passe si $c_{12}c_{34} = c_{41}\, c_{23} = c_{13}c_{24} = 0$.

Alors, un des vecteurs unitaires est orthogonal à deux autres.
Par exemple : $c_{12} = c_{13} = 0$ signifie que $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_3}$. Mais aussi : $c_{41}\, c_{23} = 0$. Il n'est pas possible que $c_{41} = 0$, car $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}$ seraient coplanaires dans le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$. Donc : $c_{23} = 0$ et $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3}$.

Trois des quatre droites sont orthogonales deux à deux (Δ_1, Δ_2 , Δ_3 dans notre exemple).
Les systèmes précédents deviennent : $\{x_1\, c_{41} - x_3\, c_{43} = 0$; $\{x_2\, c_{42} - x_1\, c_{41} = 0$; $\begin{cases} x_4\, c_{34} = 0 \\ x_4\, c_{24} = 0 \end{cases}$ d'où on tire : $x_4 = 0$, c'est-à-dire que A_4 est en H. Le tétraèdre est un tétraèdre trirectangle.

Problème 3 : moyennes prévisionnelles

Habituellement, une moyenne est calculée sur une liste de nombres connus et bien identifiés. Dans ce problème, cette règle est transgressée, il s'agit d'étudier des suites dont le terme de rang n est la moyenne des n suivants.

1. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ et C un nombre réel.

Alors pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\frac{(u_{n+1}-C)+(u_{n+2}-C)+\ldots+(u_{2n}-C)}{n}=\frac{u_{n+1}+\ldots+u_{2n}-nC}{n}=\left(\frac{u_{n+1}+\ldots+u_{2n}}{n}\right)-C$$

Si la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$, pour tout réel C la suite $(u_n-C)_{n\in N^*}$ est aussi de type $\mathcal{M}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite croissante : quels que soient les entiers m et n strictement positifs : $m<n \Rightarrow u_m \le u_n$.

Quel que soit l'entier m strictement positif : $u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{2m} \ge m\,u_{m+1}$ puisque le premier membre est une somme de m réels tous supérieurs ou égaux à u_{m+1}. Par conséquent : $\dfrac{u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{2m}}{m} \ge u_{m+1}$

Supposons que $(u_n)_{n\in N^*}$ soit une suite croissante non constante. Il existe au moins un entier m tel que : $u_m<u_{m+1}$. Alors : $u_m < \dfrac{u_{m+1}+u_{m+2}+\ldots+u_{2m}}{m}$ et la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ n'est pas une suite de type $\mathcal{M}$.

Une suite croissante non constante n'est donc pas de type $\mathcal{M}$. Par contraposition, toute suite croissante de type $\mathcal{M}$ est constante.

3. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$.
Alors ses premiers termes vérifient, successivement :

$$u_1=u_2\ ;\ u_2=\frac{u_3+u_4}{2}\ ;\ u_3=\frac{u_4+u_5+u_6}{3}\ ;\ u_4=\frac{u_5+u_6+u_7+u_8}{4}\ ;\ \ldots$$

Si de plus il existe des réels a, b, c tels que $u_n=a\,n^2+b\,n+c$ pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, en considérant les termes de rangs 1 et 2 et leurs moyennes :

$$a+b+c=4a+2b+c\ ;\ 4a+2b+c=\frac{(9a+3b+c)+(16a+4b+c)}{2}$$

Ce qui donne : $\begin{cases}3a+b=0\\17a+3b=0\end{cases}$, système d'équations qui n'a que la solution : $a=b=0$

Les seules suites de degré inférieur ou égal à 2 qui sont de type $\mathcal{M}$ sont les suites constantes.

4.1. On suppose que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite de type $\mathcal{M}$ à valeurs positives ou nulles, et on considère un entier $r\in\mathbf{N}^*$. Soit p un entier tel que $p>r$.

La suite $(u_n)_{n\in N^*}$ étant une suite de type $\mathcal{M}$: $u_r = \dfrac{u_{r+1}+u_{r+2}+...+u_{2r}}{r}$.

Puisque u_r est la moyenne arithmétique des r termes suivants, au moins un de ces termes est inférieur ou égal à cette moyenne : il existe un entier q_1 tel que $q_0 = r < r+1 \leq q_1 \leq 2r$ et $u_{q_1} \leq u_r$

Puisque u_{q_1} est la moyenne arithmétique des q_1 termes suivants, au moins un de ces termes est inférieur ou égal à cette moyenne : il existe un entier q_2 tel que $q_1+1 \leq q_2 \leq 2q_1$ et $u_{q_2} \leq u_{q_1} \leq u_r$.

On réitère ce raisonnement à propos du terme d'indice q_2.

On construit ainsi de proche en proche une suite d'entiers strictement croissante (q_i) tels que : $q_i+1 \leq q_{i+1} \leq 2q_i$ et $u_{q_{i+1}} \leq u_{q_i} \leq u_r$.

Or, une suite d'entiers strictement croissante est non majorée. Elle échelonne l'ensemble **N***, à partir de son premier terme, en l'occurrence ici à partir de l'entier $q_0 = r$.

C'est-à-dire que tout entier $p > r$ est entre deux termes consécutifs de cette suite. Soit p un entier tel que $p > r$:

Il existe un indice i tel que $q_i < p \leq q_{i+1} \leq 2q_i$ et $u_{q_{i+1}} \leq u_{q_i} \leq u_r$ et en considérant : $q = q_i$; $q' = q_{i+1}$ les conditions exigées par l'énoncé sont satisfaites:

L'entier p vérifie les inégalités $q < p \leq q' \leq 2q$ et les termes d'indices q et q' sont rangés de sorte que $u_{q'} \leq u_q \leq u_r$

Dès lors, sachant que : $u_p = \dfrac{u_{p+1}+...+u_{2p}}{p}$: $u_p \leq \dfrac{u_{q+1}+...+u_{p+1}+...+u_{2p}+u_{2p+1}+...+u_{2q}}{p}$

Montrons maintenant que $u_p \leq 3u_r$

Si $q' = p$, alors $u_p \leq u_r$ et *a fortiori* $u_p \leq 3u_r$

Sinon : $u_p = \dfrac{u_{p+1}+...+u_{2p}}{p} < \dfrac{u_{p+1}+...+u_{2p}}{q}$ puisque $q < p$

Or : $u_{p+1}+...+u_{2p} \leq (u_{q+1}+...+u_p+u_{p+1}+...+u_{q'}) + (u_{q'+1}+...u_{2p}+...+u_{2q'})$ puisque la suite est à terme positifs ou nuls et que tous les termes du premier membre figurent dans le second.

D'une part : $(u_{q+1}+...+u_p+u_{p+1}+...+u_{q'}) \leq u_{q+1}+...+u_{q'}+...+u_{2q} \leq q\,u_q \leq q\,u_r$

D'autre part : $(u_{q'+1}+...u_{2q}+...+u_{2q'}) = q'u_{q'} \leq 2q\,u_r$

Donc : $u_{p+1}+...+u_{2p} \leq q\,u_r + 2q\,u_r = 3q\,u_r$ et par suite : $u_p = \dfrac{u_{p+1}+...+u_{2p}}{q} \leq 3u_r$

4.2. Il reste à établir l'inégalité $u_p \leq 3u_r$ dans le cas où $p < r$

Supposons qu'il existe un entier $p < r$ tel que $u_p > 3u_r$

Puisque u_p est la moyenne arithmétique des p termes suivants, il y a au moins un de ces termes qui est supérieur ou égal à cette moyenne : il existe un entier q_1 tel que $p+1 \le q_1 \le 2p$ et $u_{q_1} \ge u_p$

Puisque u_{q_1} est la moyenne arithmétique des q_1 termes suivants, il y a au moins un de ces termes qui est supérieur ou égal à cette moyenne : il existe un entier q_2 tel que $q_1 + 1 \le q_2 \le 2q_1$ et $u_{q_2} \ge u_{q_1} \ge u_p$
On construit de proche en proche une suite d'entiers strictement croissante (q_i) tels que : $q_i + 1 \le q_{i+1} \le 2q_i$ et $u_{q_{i+1}} \ge u_{q_i} \ge u_p$.

Or, une suite d'entiers strictement croissante est non majorée : il existe un indice i tel que $r < q_i$ et $u_{q_i} \ge u_p > 3u_r$. On obtiendrait par cette construction un terme de rang strictement supérieur à r qui vérifierait $u_{q_i} > 3u_r$, ce qui contredirait la conclusion **4.1**

On en conclut que, si $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite de type $\mathcal{M}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls, deux termes de cette suite d'indices p et r quelconques vérifient $u_p \le 3u_r$

4.3. On suppose que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite minorée de type $\mathcal{M}$. Ce qui signifie qu'il existe un réel m tel que $m \le u_n$ pour tout entier n de **N***.

Soit E un réel strictement positif et soit p un entier strictement positif tel que $u_p - E$ soit un minorant de la suite $(u_n)_{n\in N^*}$.

La suite $\left(u_n - (u_p - E)\right)_{n\in N^*}$ est une suite de type $\mathcal{M}$ à termes positifs ou nuls. On peut lui appliquer la conclusion **4.2**, son terme de rang p est inférieur ou égal à trois fois son terme de rang quelconque r :

Quel que soit l'entier $r > 0$:

$u_p - (u_p - E) \le 3\left(u_r - (u_p - E)\right)$, soit : $3u_p - 2E \le 3u_r$ ou aussi $u_p - \dfrac{2}{3}E \le u_r$
Le nombre $u_p - \dfrac{2}{3}E$ est encore un minorant de la suite.

Par contraposition, si $u_p - \dfrac{2}{3}E$ n'est pas un minorant, $u_p - E$ n'en est pas un non plus.

En posant $E = \dfrac{3D}{2}$ on obtient l'énoncé : « si $u_p - D$ n'est pas un minorant, $u_p - \dfrac{3D}{2}$ n'en est pas un non plus ».

4.4. Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite de type $\mathcal{M}$ non constante. Deux termes au moins de cette suite sont inégaux, il existe au moins deux indices p et q : $u_q < u_p$. Le réel $D = \dfrac{u_p - u_q}{2}$ est un réel strictement positif tel que $u_p - D$ n'est pas un minorant de la suite, vu que $u_q = u_p - 2D < u_p - D$.

D'après **4.3**, $u_p - \frac{3D}{2}$ n'est pas un minorant non plus.

Montrons par récurrence que quel que soit l'entier naturel n : $u_p - \left(\frac{3}{2}\right)^n \times D$ n'est pas un minorant.

- Cette propriété est initialisée par hypothèse au rang zéro.
- Supposons que, pour un certain rang n, $u_p - \left(\frac{3}{2}\right)^n \times D$ ne soit pas un minorant. Alors, d'après **4.3** .

  $u_p - \frac{3}{2}\times\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n \times D\right) = u_p - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \times D$ n'en est pas un non plus. La propriété est héréditaire.

Elle est donc établie pour tout entier naturel n.

Or, la suite $\left(u_p - \left(\frac{3}{2}\right)^n \times D\right)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers moins l'infini.

Vu que pour tout entier n on peut trouver un indice k tel que $u_k < u_p - \left(\frac{3}{2}\right)^n \times D$, terme d'une suite divergeant vers moins l'infini, la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ n'est pas minorée.

Une suite non constante de type $\mathcal{M}$ n'est pas minorée.

Elle n'est pas non plus majorée, car sa suite opposée, elle-même de type $\mathcal{M}$, n'est pas minorée.

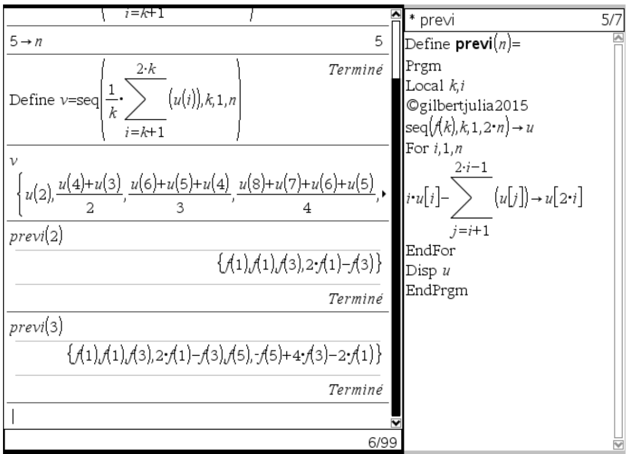
Donc une suite de type $\mathcal{M}$ qui est minorée ou bien majorée est nécessairement une suite constante.

5. Essayons de construire terme à terme une suite de type $\mathcal{M}$:

$u_2 = u_1$; $u_4 = 2u_2 - u_3 = 2u_1 - u_3$; $u_6 = 3u_3 - u_5 - u_4 = 3u_3 - u_5 - (2u_1 - u_3) = -u_5 + 4u_3 - 2u_1$.

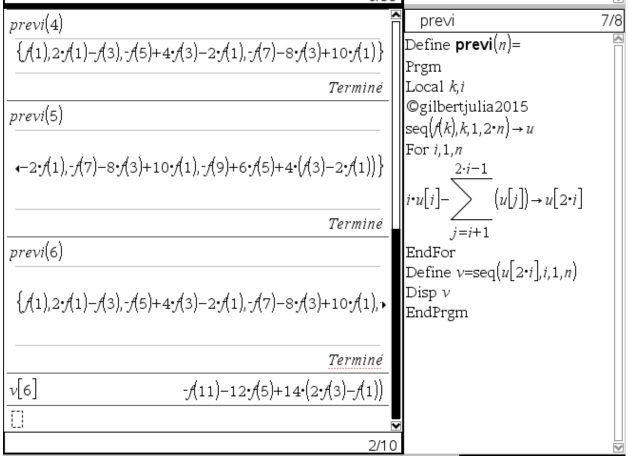
$u_8 = 4u_4 - (u_5 + u_6 + u_7) = 4(2u_1 - u_3) - (u_5 + (-u_5 + 4u_3 - 2u_1) + u_7) = -u_7 - 8u_3 + 10u_1$

De façon générale : $u_{2n} = n\,u_n - (u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{2n-1}) = n\,u_n - \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k$ est une relation de récurrence permettant d'exprimer un terme de rang pair en fonction de ses précédents. Si ces derniers s'expriment en fonction des termes impairs qui les précèdent, alors u_{2n} s'exprime lui aussi en fonction de $u_1,...,u_{2n-3}$ et de u_{2n-1} c'est-à-dire des termes impairs qui le précèdent.



Il est de ce fait possible de bâtir une suite de $\mathcal{M}$ telle que ses termes pairs s'expriment en fonction de ses termes impairs.

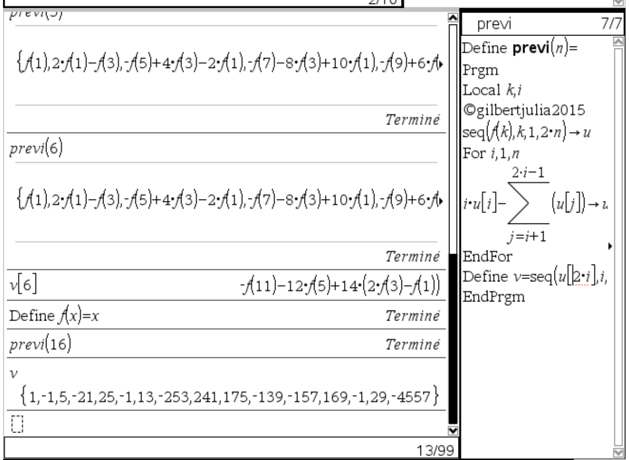
La programmation de ce processus de construction conforte cette hypothèse.



En ne faisant afficher que les termes de rang pair, on apprend que :

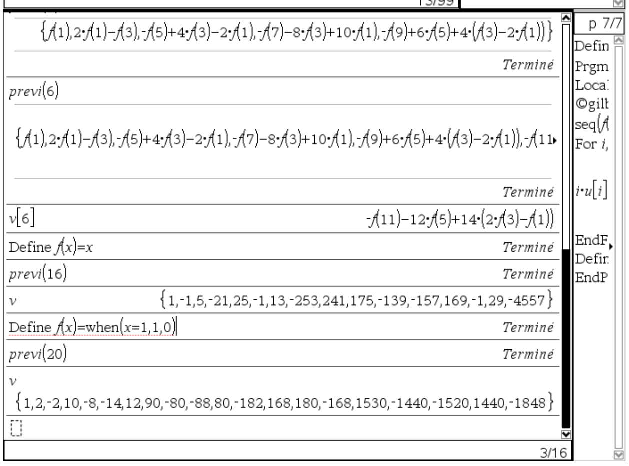
$u_{10} = -u_9 + 6u_5 + 4u_3 - 2u_1$

$u_{12} = -u_{11} - 12u_5 + 28u_3 - 14u_1$



En attribuant aux termes impairs des valeurs remarquables, en l'occurrence ci-contre : $u_{2p+1} = 2p+1$, on construit les premiers termes d'une suite de type $\mathcal{M}$.

Sont affichés les termes de rang pair, jusqu'au 32$^{\text{ème}}$.



Dans ce cas : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{2p+1} = 0 \ si \ \ p > 1 \end{cases}$.

Sont affichés les termes de rang pair jusqu'au 40$^{\text{ème}}$.

En résumé, il existe des suites non constantes de type $\mathcal{M}$, que l'on peut construire par récurrence en exprimant les termes de rang pair en fonction des termes de rang impair, lesquels peuvent être arbitrairement choisis.