Concours Général 2015
Petits poids. Programmation et conjectures

Comme à l'accoutumée, le Concours Général 2015 propose des problèmes qui suscitent tout à la fois curiosité et intérêt. Le premier problème nous invite à suivre les pas de Clara et d'Isabelle, deux mathématiciennes en herbe qui nous entraînent à leur suite dans une jungle dense de raisonnements pointus.

Ce document a pour objectif d'ouvrir quelques pistes de réflexion.

1. Le sujet

Pour tout entier $n \geq 2$ et toute suite finie de n réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$, on appelle poids de la suite la plus grande des valeurs $|x_1|, |x_1 + x_2|, ..., |x_1 + x_2 + ... + x_n|$. Par exemple, pour $n = 4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4,4,0,-9)$, le poids de la suite est égal à 8. Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9,4,0,4)$ le poids est égal à 9.
On remarque que les deux suites finies ci-dessus sont formées des mêmes nombres dans un ordre différent et qu'elles ont des poids différents.

1. Déterminer le poids des suites finies suivantes :
1.1. $(3,5,-6,-8,2)$ (et donc $n = 5$).
1.2. (1,2,3, . . . ,2014,2015,- 2015, -2014, . . . ,- 2,- 1) (et donc $n = 4030$).
1.3. Dans chacun des deux exemples précédents, réordonner les termes de façon à obtenir un poids plus petit.

On donne à Isabelle et Clara la même suite finie de n réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Isabelle veut la réordonner de façon à obtenir une suite finie de poids minimal. Pour cela, elle considère tous les ordres possibles de ces n réels, détermine pour chacun le poids de la suite correspondante, et choisit un ordre pour lequel le poids est minimal. On note I ce poids minimal.

De son côté, Clara, plus pressée qu'Isabelle, adopte l'algorithme suivant :
Elle commence par choisir parmi les n réels un nombre, noté c_1, de sorte que la valeur de $|c_1|$ soit la plus petite possible. Elle choisit ensuite le nombre c_2 parmi les $n-1$ réels qui restent, afin que la valeur de $|c_1 + c_2|$ soit la plus petite possible. Plus généralement, après avoir choisi les nombres $c_1, c_2, ..., c_i$ parmi les n réels donnés au départ, elle choisit c_{i+1} parmi les $n - i$ restants de sorte que la valeur de $|c_1 + ... + c_i + c_{i+1}|$ soit la plus petite possible.
Elle obtient finalement une suite finie $(c_1, c_2, ..., c_n)$ de n réels. On note C son poids.

2. Déterminer I et C dans les deux cas suivants :
2.1. $n = 3$ et $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -4)$.
2.2. $n = 4$ et $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, -2)$

3. Si $n = 2$, montrer que $I = C$.

4. Si $n = 3$, montrer que $C \leq \frac{3}{2} I$.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 4 et soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la suite finie donnée à Isabelle et Clara.
On pose $M = \max(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$, $S = |x_1 + x_2 + ... + x_n|$ et $N = \max(M, S)$
5.1. Montrer que $S \leq I$.
5.2. Montrer que $M \leq 2I$.
5.3. Montrer que $C \leq N$.
5.4. En déduire que $C \leq 2I$.
5.5. Déterminer n réels $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que $C = 2I$.

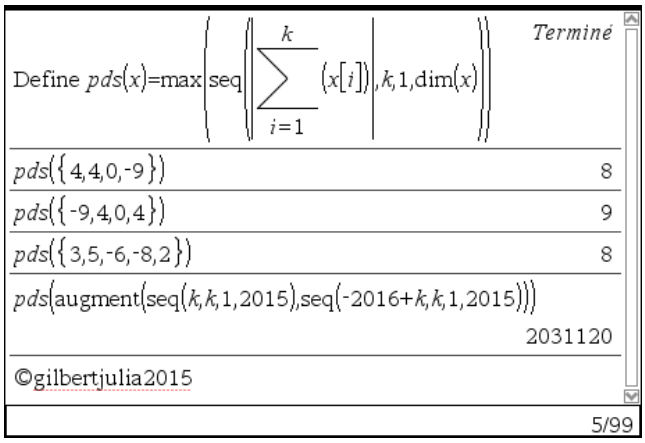
2. Une fonction pour calculer le poids d'une suite

La fonction **pds** est définie par :

$$\mathbf{pds}(x)=\max\left(seq\left(\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|,k,1,\dim(x)\right)_{gj2015}\right)$$

Une suite finie étant donnée sous forme de liste, elle renvoie le poids de cette suite.

Si la réponse est immédiate pour une suite de quatre ou cinq nombres réels, il faut attendre plus de trois minutes lorsqu'il s'agit d'une suite de 4030 termes comme celle de la question **1.2**
Pour ce dernier exemple, un calcul « à la main » est nettement plus rapide …



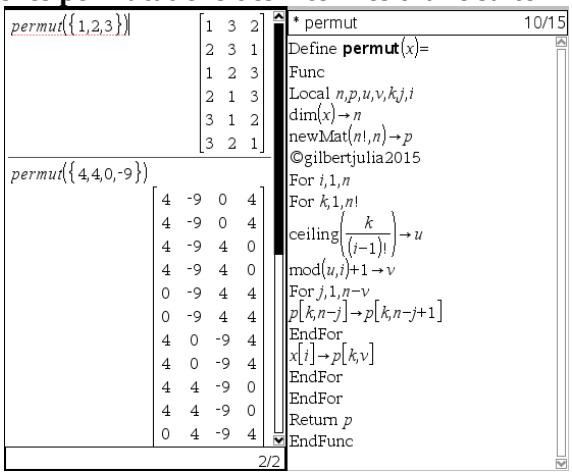
3. La méthode d'Isabelle

La méthode d'Isabelle consiste à rechercher exhaustivement les suites finies de poids minimal. Elle considère en effet toutes les permutations possibles des *n* réels $(x_1,x_2,...,x_n)$. Elle trouve de ce fait à coup sûr toutes les suites de poids minimal, mais sa méthode n'est viable que pour de petites valeurs de *n* car le nombre d'opérations nécessaires pour la mener à son terme est du même ordre que $n\times n!$.

3.1. Une fonction pour décrire (avec modération) toutes les permutations des *n* termes d'une suite

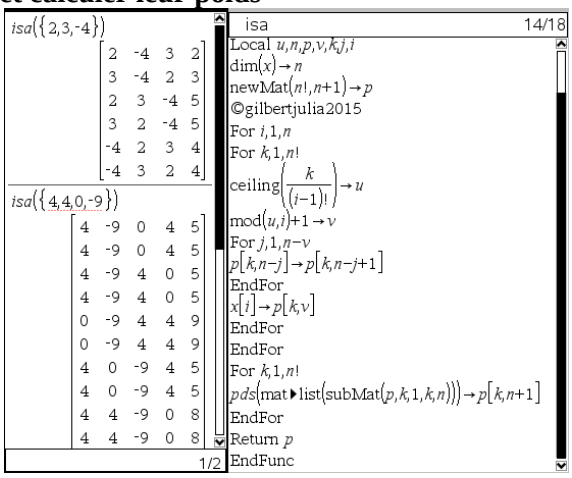
La fonction **permut** renvoie sous forme d'une matrice $(n!)\times n$ les *n*! permutations des termes de la suite $(x_1,x_2,...,x_n)$ qui lui est affectée. Elle n'est utilisable que pour des suites de longueur inférieure ou égale à 6 ce qui, tout de même, restreint son usage.

En effet, si la suite contient 7 termes ou plus, le nombre de permutations est au moins 5040 et les ressources logicielles sont dépassées.



3.2. Une fonction pour décrire toutes les permutations et calculer leur poids

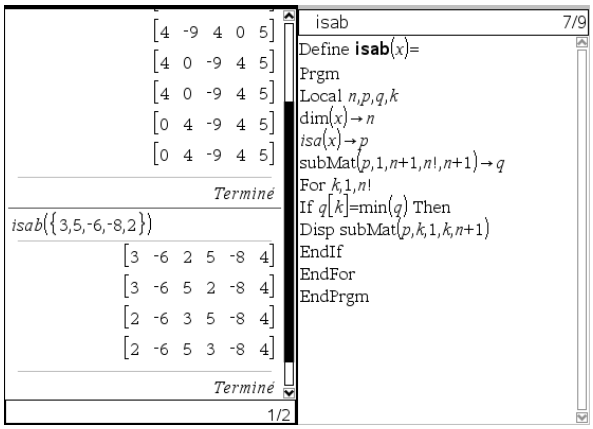
La fonction **isa** ajoute à la matrice renvoyée par la fonction précédente une colonne exprimant le poids de chaque permutation. Par exemple, si on l'applique à la suite $(2,3,-4)$, on obtient en permutant les termes des suites de poids 2, 3, 4 ou 5. Si on l'applique à la suite $(4,4,0,-9)$, on constate que plusieurs permutations ont pour poids 5. Il est donc possible en réorganisant cette suite d'obtenir un poids plus petit que 8.



3.3. La méthode d'Isabelle

Il reste à sélectionner parmi la liste (qui peut être très longue) de toutes les permutations uniquement celles qui donnent un poids minimal. C'est ce que réalise le programme **isab**.

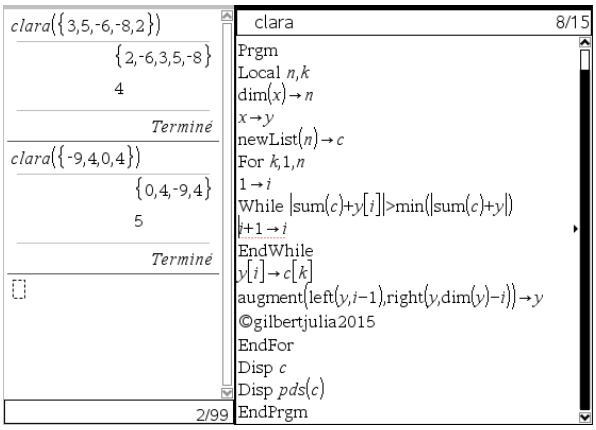
Par exemple, dans le cas de la suite $(3,5,-6,-8,2)$, on obtient quatre permutations différentes dont le poids est égal à 4.



4. La méthode de Clara

La méthode de Clara est beaucoup moins gourmande en ressources, la permutation qu'elle sélectionne ne lui demande que $n+(n-1)+...+2+1$ opérations, soit un nombre d'opérations du même ordre que n^2 . En revanche, il n'y a aucune garantie que la permutation obtenue soit de poids minimal. Elle est seulement de poids « pas très grand ».

Cependant, dans le cas de l'exemple **1.2**, Clara obtient bien une permutation de poids minimal. Il en est de même pour la suite donnée en exemple en début d'énoncé.



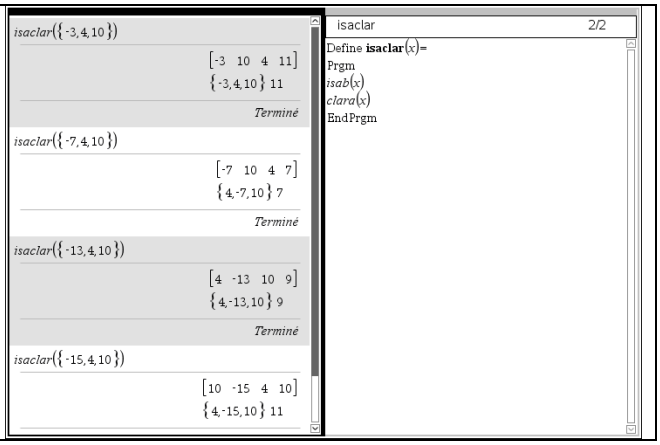
Dans le cas de la suite $(x_1,x_2,x_3)=(1,2,-4)$ de la question **2.1**, le lecteur pourra constater qu'Isabelle obtient un ordonnancement de poids 2, tandis que l'ordonnancement de Clara est de poids 3.
Dans le cas de la suite $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1,-1,2,-2)$ du **2.2**, le lecteur pourra constater qu'Isabelle obtient deux ordonnancements de poids 1 tandis que l'ordonnancement de Clara est de poids 2.

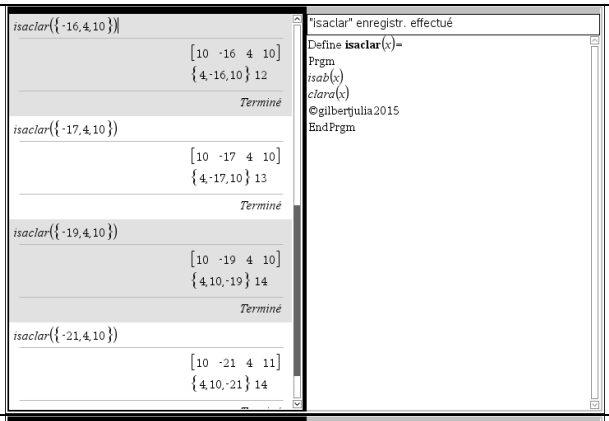
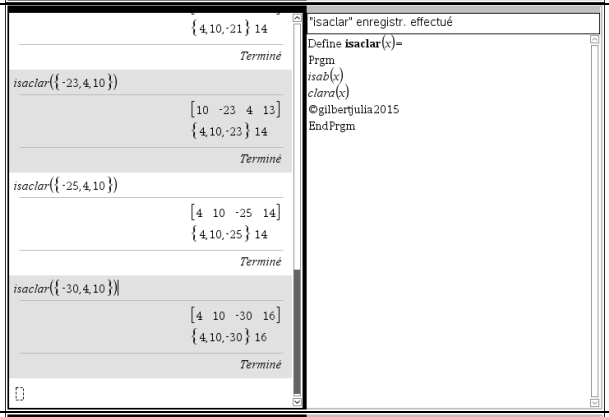
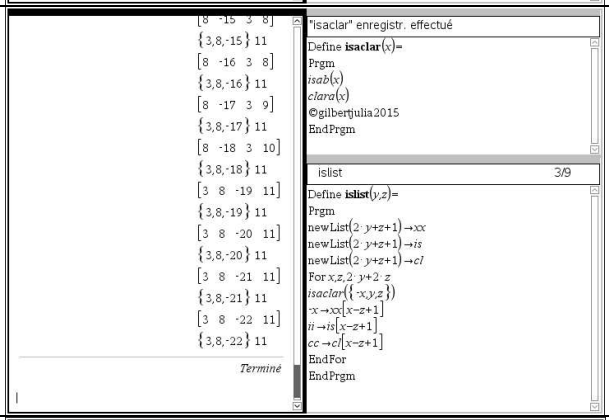
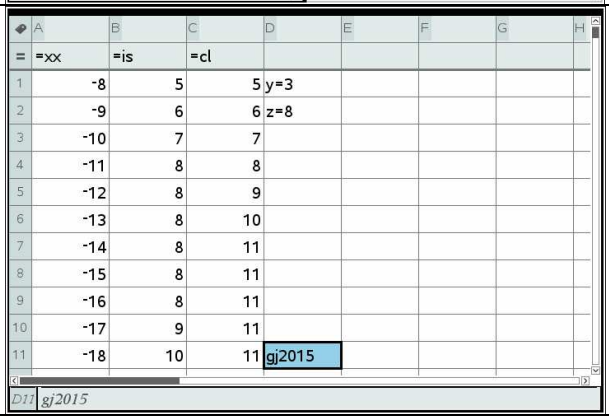
5. Comparaison des deux méthodes

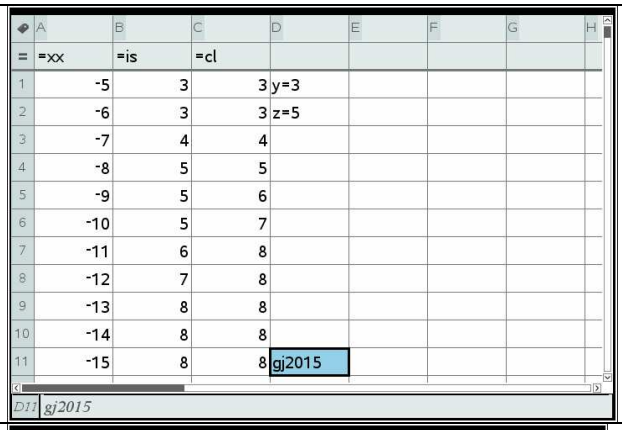
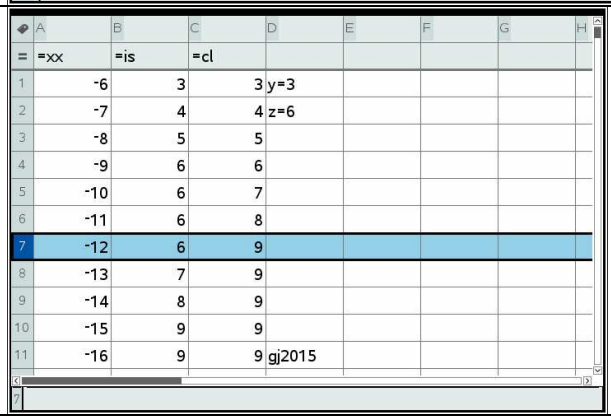
On s'intéresse particulièrement au cas $n=3$. On veut comparer, pour quelques suites de longueur 3, les résultats obtenus respectivement par Isabelle et par Clara. Pour cela, on va fixer deux nombres positifs y et z et examiner ce qu'il se passe quand on fait varier un troisième nombre, négatif, que l'on va noter $-x$.

Le programme **isaclar** fait exécuter l'un après l'autre les deux programmes **isab** et **clara**. De plus, une instruction « Exit » a été ajoutée dans la boucle « If … EndIf » du programme **isab**. De la sorte, une seule suite de poids minimal est affichée.

Dans les exemples ci-contre, on a choisi $y=4,\ z=10$ et on a essayé les valeurs $-x=-3;-7;-13;-15$
Dans les trois premiers exemples, on constate que $C=I=y+z-x$, tandis que dans le quatrième $C\neq I$.



Cette propriété persiste lorsqu'on essaie les valeurs $-x=-16;-17;-19;-21$	
Puis elle finit par disparaître. Au lecteur d'observer les changements liés au choix de la suite obtenue par Clara et à celui d'une suite minimale. Et d'en dénouer les raisons …	
On peut prévoir de tabuler la zone des valeurs $-x$ où il peut exister un écart entre *C* et *I*. C'est ce que fait le programme **islist**. Les programmes **isab** et **clara** ont été légèrement modifiés : en fin des deux programmes, les valeurs *I* et *C* obtenues ont été stockées respectivement en variables **ii** et **cc**.	
Voici un exemple avec $y=3\,;\,z=8$. Les valeurs (entières) de $-x$ à l'écran vont de – 8 à – 18. Les valeurs de $-x$ sont dans la première colonne, celles de *I* et de *C* dans les colonnes suivantes.	

Un autre avec $y=3\,;\,z=5$	
Un dernier pour la route avec $y=3\,;\,z=6$. On observe un cas où $C=\dfrac{3I}{2}$ exactement.	

5.1. Il est intéressant de commencer par traiter cette question dans sa généralité. Que dire d'une suite dont le poids est égal à la valeur absolue de la somme de ses termes ?

3. Calculer les poids des suites $(x_1,\,x_2)$ et (x_2,x_1) et repérer dans quel cas elles sont de poids différents. Quelle est celle de poids le plus petit ?

4. Cas $n=3$. Que dire si les trois nombres $(x_1,\,x_2,\,x_3)$ sont tous de même signe ?
S'ils ne sont pas tous de même signe, il y en a deux d'un signe et le troisième du signe opposé. On peut supposer qu'il y a deux positifs et un négatif. S'intéresser à la suite $(-x,\,y,\,z)$ où x,y,z sont des réels positifs donnés et discuter suivant les valeurs de *x* relativement à *y* et à *z*, quelle est la permutation opérée par Clara et quelle est la valeur de *C*.

Envisager la suite $(z,\,-x,\,y)$ qui peut dans certains cas « concurrencer » la suite obtenue par Clara.

5.2. *Un lemme (à démontrer) utile* : Soient *a* et *b* deux réels tels que $|a|\le|b|$. Alors ou bien $|a|\ge\dfrac{|b|}{2}$, ou bien $|a+b|\ge\dfrac{|b|}{2}$.

5.3. Supposer que $C>M$ c'est-à-dire qu'il existe un indice j : $|c_1+c_2+\ldots c_j+c_{j+1}|>M$ (il faut au moins deux termes pour dépasser *M*). Montrer qu'alors $C=S$ (peut-être s'intéresser aux signes de $c_1+c_2+\ldots c_j$ et des c_k d'indices plus grands que *j*)

5.5. La suite $(1,-1,\,2,-2)$ est un excellent début. Comment la prolonger de deux termes pour obtenir une suite de six réels telle que $C=2I$? Et une suite de huit réels ? Et au-delà ?