Tétraèdres.

Ce problème est un mixage de deux thèmes.

Le premier thème aborde la notion de « point de Monge » d'un tétraèdre et amène à la démonstration d'un alignement de points remarquables qui rappelle l'alignement G, H, O et la droite d'Euler dans un triangle du plan.

La partie C, indépendante des deux précédentes, est extraite du problème 2 du concours général 2015.

On rappelle ci-dessous quelques prérequis, notamment sur la notion de tétraèdre orthocentrique.

On appelle tétraèdre la donnée, dans l'espace, de quatre points non coplanaires *A, B, C, D*. Les arêtes du tétraèdre sont les segments [*AB*], [*AC*], [*AD*], [*BC*], [*BD*], [*CD*].

R1. Pour tout tétraèdre *ABCD*, il existe un unique point *G* tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, appelé *centre de gravité* du tétraèdre.
Ce point *G* est point de concours des médianes du triangle, droites reliant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée. Il est aussi point de concours et milieu des bimédianes, segments joignant les milieux de deux arêtes opposées.

R2. Il existe un unique point *O* équidistant des quatre points *A, B, C, D*. Il est point d'intersection des axes médiateurs de chaque triangle *ABC, BCD, CDA, DAB* (droites passant par les centres des cercles circonscrits à chacun de ces triangles et perpendiculaires au plan de celui-ci) et point commun aux six plans médiateurs des arêtes. Il est centre d'une unique sphère qui passe par *A, B, C, D* (sphère circonscrite au tétraèdre).

R3. On appelle hauteur issue de *A* la droite passant par *A* et orthogonale au plan *BCD*. On définit de façon analogue les trois autres hauteurs, issues de *B*, de *C* et de *D*. On dit qu'un tétraèdre de l'espace est *orthocentrique* si ses hauteurs sont concourantes (tous ne le sont pas). Une condition nécessaire et suffisante (parmi d'autres …) pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique est que ses arêtes opposées soient, deux à deux, orthogonales.

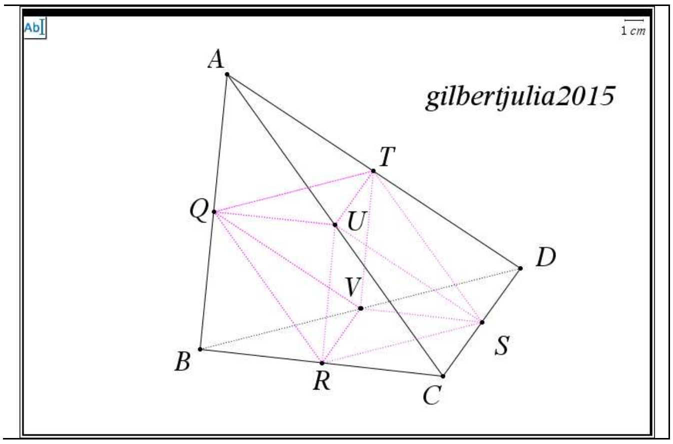
1. Le sujet

Partie A. Plans médiaux d'un tétraèdre et point de Monge

On note, respectivement, Q, R, S, T, U, V les milieux des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, $[BD]$. On appelle *plan médial* du tétraèdre tout plan passant par le milieu d'une arête et perpendiculaire à l'arête opposée. Il y a ainsi six plans médiaux.

Par exemple le plan P_Q passant par Q et perpendiculaire à (CD) est un plan médial.

On note de même P_R, P_S, … les autres plans médiaux.



1. Montrer que la droite d'intersection de P_Q avec le plan (QVR) est la hauteur issue de Q du triangle QVR. Etudier de même les intersections de P_V et de P_R avec le plan (QVR).

2. On note Δ_B la droite perpendiculaire au plan (QVR) et passant par l'orthocentre H_B du triangle QVR. Montrer que Δ_B est incluse dans chacun des trois plans P_Q, P_V et P_R.

3. On note Δ_A la droite perpendiculaire au plan (QTU) et passant par l'orthocentre H_A du triangle QTU. Montrer que Δ_B et Δ_A sont sécantes en un point M qui appartient à cinq des six plans médiaux du tétraèdre.

4. Montrer qu'il appartient aussi au sixième plan médial. Ce point M est appelé « point de Monge » du tétraèdre.

5. Montrer que si le tétraèdre $ABCD$ est orthocentrique alors son orthocentre est en même temps son point de Monge.

Partie B. Plans médiaux et plans médiateurs du tétraèdre.
Un plan médiateur du tétraèdre est un plan passant par le milieu d'une arête et perpendiculaire à cette même arête. Il y a six plans médiateurs, que l'on notera Π_Q, Π_R, Π_S, …

1. Montrer que P_Q et Π_S sont symétriques par rapport à G et que, plus généralement, le symétrique par rapport à G d'un plan médial est un plan médiateur.

2. Montrer que les points M et O sont symétriques par rapport à G.

3. Est-il vrai que les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique $ABCD$ sont concourantes en O si et seulement si le tétraèdre est régulier ? Est-il vrai que les hauteurs d'un tétraèdre orthocentrique $ABCD$ sont concourantes en G si et seulement si le tétraèdre est régulier ? Est-il vrai que dans un tétraèdre quelconque $ABCD$, centre de gravité G et centre de la sphère circonscrite O sont confondus si et seulement si le tétraèdre est régulier ?

Partie C. Un problème de construction

Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v}.\vec{w}$

Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ quatre droites distinctes non coplanaires concourantes en un point H. Pour $1 \leq i \leq 4$, on choisit un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u_i}$ de Δ_i et, pour $1 \leq i \leq 4$; $1 \leq j \leq 4$, on note $c_{ij} = \overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j}$

1. On suppose qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $c_{12} \times c_{34} = c_{13} \times c_{24} = c_{14} \times c_{23}$.

2. Réciproquement, si $c_{12} \times c_{34} = c_{13} \times c_{24} = c_{14} \times c_{23} \neq 0$, montrer qu'il existe un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en H et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les droites Δ_i pour $1 \leq i \leq 4$, passant par l'origine O du repère et de vecteurs directeurs : $\Delta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\Delta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\Delta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\Delta_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ dont les hauteurs sont concourantes en O et tel que $A_j \in \Delta_j$ pour tout $j \in \{1, 2, 3, 4\}$? Si oui, en proposer un.

1. Les points V et R étant les milieux de deux des côtés du triangle BCD, la droite (VR) est parallèle au troisième côté (CD) de ce triangle. Puisque (CD) est perpendiculaire au plan P_Q, il en est de même de la droite (VR). Cette droite est orthogonale à toutes les droites du plan P_Q, en particulier à la droite d'intersection de P_Q avec le plan (QVR). Cette droite d'intersection est une droite du plan (QVR) qui passe par Q et qui est perpendiculaire à (VR) : c'est la hauteur issue de Q du triangle QVR.

De même, Q et V étant milieux de deux côtés du triangle BAD, la droite (QV) est parallèle au troisième côté (AD) de ce triangle. Elle est perpendiculaire au plan P_R donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite d'intersection de P_R avec le plan (QVR). Cette droite d'intersection est une droite du plan (QVR) qui passe par R et qui est perpendiculaire à (QV) : c'est la hauteur issue de R du triangle QVR.
De même, l'intersection de P_V avec le plan (QVR) est la hauteur issue de V du triangle QVR.

2. Soit un plan P et une droite D perpendiculaire à P. Alors, toute droite orthogonale à D est parallèle au plan P. Si de plus cette droite passe par un point de P, elle est incluse dans P. c'est la démarche qu'on va utiliser.

Le point H_B, placé sur les trois hauteurs de QVR, appartient à chacun des trois plans
La droite Δ_B étant perpendiculaire au plan QVR est orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier aux droites (VR), (RQ), (QV). Elle est donc orthogonale aux droites (CD), (CA) et (AD) qui leur sont, respectivement, parallèles. Or, (CD), (CA) et (AD) sont perpendiculaires, respectivement, aux plans P_Q, P_V, P_R.
Δ_B passe un point de P_Q et elle est orthogonale à (CD) : elle est incluse dans P_Q.
Δ_B passe un point de P_R et elle est orthogonale à (CA) : elle est incluse dans P_R.
Δ_B passe un point de P_V et elle est orthogonale à (AD) : elle est incluse dans P_V.

Ces trois plans médiaux ont donc une droite commune. On montrerait pareillement que, trois à trois, ces plans médiaux ont une droite commune : P_Q, P_T, P_U ont en commun la droite Δ_A que l'énoncé définit, P_U, P_R, P_S ont en commun la perpendiculaire Δ_C au plan (URS) passant par l'orthocentre H_C du triangle URS et P_T, P_V, P_S ont en commun la perpendiculaire Δ_C au plan (TVS) passant par l'orthocentre H_D du triangle TVS

3. De la même façon, la droite Δ_A est incluse dans les trois plans médiaux P_Q, P_U, P_T.
Les deux droites Δ_A et Δ_B sont toutes deux incluses dans un même plan, en l'occurrence P_Q. Elles ne sont pas parallèles, puisque respectivement perpendiculaires à deux plans sécants. Elles sont sécantes. Leur point d'intersection M appartient aux cinq plans P_Q, P_V, P_R, P_U, P_T.

4. Il reste à montrer que M appartient à P_S. Mais M appartient aux deux plans P_R et P_U. Il est sur leur droite d'intersection Δ_C, droite qui est aussi incluse dans P_S. Ainsi, M appartient au sixième plan médial P_S.

5. Si le tétraèdre est orthocentrique, alors les arêtes opposées sont deux à deux orthogonales. Puisque (AB) est orthogonale à (CD) et qu'elle passe par Q, elle est incluse dans le plan P_Q. De même, P_R contient la droite (BC), P_S contient (CD), etc …
Le point B appartient à P_Q et à P_R donc à leur droite d'intersection Δ_B. Cette droite est perpendiculaire au plan (QVR) donc au plan (ACD) qui en est un plan parallèle et passe par le sommet opposé : c'est une hauteur du tétraèdre. De même les droites Δ_A, Δ_C et Δ_D sont des hauteurs du tétraèdre. Leur point de concours en est l'orthocentre.

Partie B.
1. Les plans P_Q et Π_S sont tous les deux perpendiculaires à (CD) : ils sont parallèles. Le point G est isobarycentre des quatre points A, B, C, D. D'après le théorème d'associativité, il est aussi barycentre de $(Q,2)$; $(S,2)$: c'est le milieu de $[QS]$ (le centre de gravité d'un tétraèdre est milieu de ses bimédianes). De la sorte, Q et S sont symétriques par rapport à G. La symétrie centrale de centre G transforme P_Q en le plan qui lui est parallèle et qui passe par l'image de Q ; c'est le plan Π_S.
De même, P_R et Π_T sont symétriques par rapport à G, etc …

2. Une transformation quelconque de l'espace transforme l'intersection de deux objets en l'intersection de leurs images : la symétrie centrale de centre *G* transforme l'intersection *M* des six plans médiaux en l'intersection *O* des six plans médiateurs.

On pourrait ainsi démontrer, de façon peut-être plus élégante, que les six plans médiaux ont un point commun : puisque les six plans médiateurs ont en commun le centre *O* de la sphère circonscrite au tétraèdre, les six plans médiaux qui en sont leurs images par la symétrie centrale de centre *G* ont en commun l'image de *O* par cette symétrie centrale.

3. Dans le cas d'un tétraèdre régulier, $G = O = H$.
Réciproquement, chacune des conditions énoncées implique que $G = O = M$. Mais si le point de Monge est en *O*, alors les droites Δ_A, Δ_B, Δ_C et Δ_D sont aussi les axes médiateurs des triangles *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC*. Les points H_A, H_B, H_C, H_D orthocentres des triangles *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC* sont en même temps les centres des cercles circonscrits à ces triangles (dans leurs plans). Or, un triangle dont l'orthocentre est confondu avec le centre du cercle circonscrit est nécessairement équilatéral. Les faces *BCD*, *CDA*, *DAB*, *ABC* du tétraèdre sont toutes des triangles équilatéraux, le tétraèdre est régulier.

Partie C.

1. Il existe des réels $x_1,\ x_2, x_3,\ x_4$ tels que : $\overrightarrow{HA_j} = x_j\,\overrightarrow{u_j}$ pour tout $j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

Pour $1 \le i \le 4$; $1 \le j \le 4$: $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{HA_j} - \overrightarrow{HA_i} = x_j\,\overrightarrow{u_j} - x_i\,\overrightarrow{u_i}$

Si les hauteurs sont concourantes en *H*, les droites (HA_1), (HA_2), (HA_3) et (HA_4) sont respectivement orthogonales aux plans $(A_2A_3A_4)$, $(A_3A_4A_1)$, $(A_4A_1A_2)$, $(A_1A_2A_3)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (HA_1) soit orthogonale à $(A_2A_3A_4)$ est qu'un de ses vecteurs directeurs soit orthogonal à deux vecteurs indépendants de la direction de $(A_2A_3A_4)$: $\begin{cases} \overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{A_2A_3} = 0 \\ \overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \end{cases}$

Autrement dit : $\begin{cases} x_1\overrightarrow{u_1}.\left(x_3\overrightarrow{u_3} - x_2\,\overrightarrow{u_2}\right) = 0 \\ .x_1\overrightarrow{u_1}.\left(x_4\overrightarrow{u_4} - x_3\,\overrightarrow{u_3}\right) = 0 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x_1\left(x_3\,c_{13} - x_2\,c_{12}\right) = 0 \\ x_1.\left(x_4\,c_{14} - x_3\,c_{13}\right) = 0 \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} x_3\,c_{13} - x_2\,c_{12} = 0 \\ x_4\,c_{14} - x_3\,c_{13} = 0 \end{cases}$
puisque x_1 n'est pas nul.

De même : $\begin{cases} \overrightarrow{HA_2}.\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \\ \overrightarrow{HA_2}.\overrightarrow{A_4A_1} = 0 \end{cases}$ implique : $\begin{cases} x_4\,c_{24} - x_3\,c_{23} = 0 \\ x_1\,c_{12} - x_4\,c_{24} = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \overrightarrow{HA_3}.\overrightarrow{A_4A_1} = 0 \\ \overrightarrow{HA_3}.\overrightarrow{A_2A_4} = 0 \end{cases}$ implique : $\begin{cases} x_1\,c_{13} - x_4\,c_{34} = 0 \\ x_4\,c_{34} - x_2\,c_{23} = 0 \end{cases}$

et $\begin{cases} \overrightarrow{HA_4}.\overrightarrow{A_1A_2} = 0 \\ \overrightarrow{HA_4}.\overrightarrow{A_2A_3} = 0 \end{cases}$ implique : $\begin{cases} x_2\,c_{24} - x_1\,c_{14} = 0 \\ x_3\,c_{34} - x_2\,c_{24} = 0 \end{cases}$.

De ces relations, on tire (entre autres) un système 2×2 d'équations linéaires d'inconnues x_1 et x_2 :
$\begin{cases} x_2\,c_{24} - x_1\,c_{14} = 0 \\ x_2\,c_{23} - x_1\,c_{13} = 0 \end{cases}$, un autre d'inconnues x_1 et x_3 : $\begin{cases} x_1\,c_{12} - x_3\,c_{23} = 0 \\ x_1\,c_{14} - x_3\,c_{34} = 0 \end{cases}$ et un d'inconnues x_4 et x_1 :
$\begin{cases} x_1\,c_{13} - x_4\,c_{34} = 0 \\ x_1\,c_{12} - x_4\,c_{24} = 0 \end{cases}$

Puisque ces systèmes ont des solutions non nulles, leurs déterminants sont nuls : $c_{12}c_{34} - c_{41}\,c_{23} = 0$ et $c_{13}c_{24} - c_{23}\,c_{41} = 0$. Par suite : $c_{12}c_{34} = c_{41}\,c_{23} = c_{13}c_{24}$

On peut regarder au passage ce qu'il se passe si $c_{12}c_{34} = c_{41}\,c_{23} = c_{13}c_{24} = 0$. Alors, un des vecteurs unitaires est orthogonal à deux autres. Par exemple : $c_{12} = c_{13} = 0$ signifie que $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$; $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_3}$. Mais aussi : $c_{41}\,c_{23} = 0$. Il n'est pas possible que $c_{41} = 0$, car $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{u_4}$ seraient coplanaires dans le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$. Donc : $c_{23} = 0$ et $\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3}$. Trois des droites sont orthogonales deux à deux (Δ_1, Δ_2 , Δ_3 dans notre exemple).

Les systèmes précédents deviennent : $\{x_1\,c_{41} - x_3\,c_{43} = 0$; $\{x_2\,c_{42} - x_1\,c_{41} = 0$; $\begin{cases} x_4\,c_{34} = 0 \\ x_4\,c_{24} = 0 \end{cases}$ d'où on tire :

$x_4 = 0$, c'est-à-dire que A_4 est en H. Le tétraèdre est un tétraèdre trirectangle.

2. Réciproquement, si $c_{12}c_{34} = c_{41}\,c_{23} = c_{13}c_{24} \neq 0$, alors les systèmes 2×2 précédents, tous de déterminant nul, ont une infinité de solutions, que l'on peut exprimer en fonction de $x_1 = \lambda$ (non nul) :

$x_2 = \dfrac{c_{14}}{c_{24}}\lambda$; $x_3 = \dfrac{c_{12}}{c_{23}}\lambda$; $x_4 = \dfrac{c_{12}}{c_{24}}\lambda$. Ces réels sont tous non nuls.

Si ces relations sont vérifiées, en posant $\overrightarrow{HA_i} = x_i\,\overrightarrow{u_i}$; $i = 1,2,3,4$ on construit quatre points A_i, un sur chaque droite et tous distincts de H tels que les relations vectorielles $\begin{cases} \overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{A_2A_3} = 0 \\ \overrightarrow{HA_1}.\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \end{cases}$, etc … sont vérifiées. Les droites (HA_i) sont perpendiculaires aux faces opposées : les tétraèdres obtenus (qui se déduisent les uns des autres par homothéties de centre H) sont orthocentriques.

3. Application numérique.
Un vecteur unitaire directeur de chaque droite est, respectivement :

$$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} ; \overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} ; \overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}.$$

Ainsi : $c_{12} = c_{13} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $c_{14} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $c_{23} = \dfrac{1}{2}$; $c_{24} = c_{34} = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$c_{12}c_{34} = c_{13}c_{24} = c_{14}c_{23} = \dfrac{\sqrt{12}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, la condition de la question **2** est vérifiée.

$x_1 = \lambda$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}/3}{-\sqrt{6}/3}\lambda$; $x_3 = \dfrac{-\sqrt{2}/2}{1/2}\lambda$; $x_4 = \dfrac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{6}/3}\lambda$ soit :

$x_1 = \lambda$; $x_2 = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\lambda$; $x_3 = -\sqrt{2}\,\lambda$; $x_4 = \sqrt{3}\,\lambda$.

Par exemple : $x_1 = 2$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = -2\sqrt{2}$; $x_4 = 2\sqrt{3}$.
Ce qui amène aux points suivants :

$$A_1\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} ; A_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} ; A_3\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} ; A_4\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$$