Concours Général 2014. Eléments de correction

Problème 1 : stabilité géométrique

1. Voici une occasion de s'entraîner à l'usage de la « notation sigma », assez pratique dans une telle circonstance :

Intéressons nous à la somme : $q^{n-1}\, b_0 + q^{n-2}\, b_1 + \ldots + q\, b_{n-2} + b_{n-1} = \sum_{k=0}^{k=n-1} q^{n-1-k}\, b_k$

Sachant que $b_k = x_{k+1} - q\, x_k$ pour tout indice k : $\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k}\, b_k \right) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left[q^{n-1-k} \left(x_{k+1} - q\, x_k \right) \right]$

Distribuons en deux sommes distinctes : $\sum_{k=0}^{k=n-1} \left[q^{n-1-k} \left(x_{k+1} - q\, x_k \right) \right] =_{gj} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k}\, x_{k+1} \right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right)$

Réindexons la première des deux sommes obtenues à l'aide du changement d'index : $j = k + 1$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k}\, x_{k+1} \right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right) = \sum_{j=1}^{j=n} \left(q^{n-j}\, x_j \right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right)$$

Les deux sommes ne diffèrent que par un décalage d'une unité de leurs bornes d'indexation :

$$\sum_{j=1}^{j=n} \left(q^{n-j}\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{j=n-1} \left(q^{n-j}\, x_j \right) + x_n \text{ tandis que } \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right) = q^n\, x_0 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right)$$

Par conséquent : $\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k} b_k \right) = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k}\, x_{k+1} \right) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-k}\, x_k \right) =_{gj} x_n - q^n\, x_0$ ou ce qui revient au même :

$\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(q^{n-1-k}\, b_k \right) + q^n\, x_0 = x_n$. C'est la relation de l'énoncé.

NB. Si on ne souhaite pas utiliser cette notation :

$q^{n-1}\, b_0 + .. + b_{n-1} = q^{n-1} \left(x_1 - q\, x_0 \right) + q^{n-2} \left(x_2 - q\, x_1 \right) + \ldots + q \left(x_{n-1} - q\, x_{n-2} \right) + \left(x_n - q\, x_{n-1} \right)$.

Remarquer que les termes intermédiaires s'éliminent deux à deux après développement, il reste :

$q^{n-1}\, b_0 + q^{n-2}\, b_1 + \ldots + q\, b_{n-2} + b_{n-1} =_{gj} x_n - q^n\, x_0$

2.1. $x_n - q^n\, x_0$ est égal à la somme $\sum_{k=0}^{k=n-1} q^{n-1-k}\, b_k$. Proposons-nous de trouver un encadrement de cette somme.

Par hypothèse, quel que soit l'entier *k* tel que $0 \le k \le n-1$: $0 \le b_k \le \varepsilon$.

Chacun des termes de la somme $\sum_{k=0}^{k=n-1} q^{n-1-k}\, b_k$ vérifie l'encadrement $0 \le q^{n-1-k}\, b_k \le q^{n-1-k}\, \varepsilon$. Par addition terme à terme, le sens des inégalités est conservé : $0 \le \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k} b_k\right) \le \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k}\, \varepsilon\right) = \varepsilon \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k}\right)$.

Réindexons la somme obtenue à l'aide du changement d'index : $j = n-1-k$: $\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k}\right) = \sum_{j=0}^{j=n-1}\left(q^{j}\right)$.

On reconnaît la somme des *n* premières puissances du réel *q*. $\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k}\right) = \sum_{j=0}^{j=n-1}\left(q^{j}\right) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$ et de plus, dans le cas où $0 < q < 1$, $\dfrac{1-q^n}{1-q} < \dfrac{1}{1-q}$ pour tout entier naturel *n*.

En conséquence, pour tout entier naturel *n* : $0 \le \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k} b_k\right) \le \varepsilon \dfrac{1-q^n}{1-q} < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$.

Autrement dit, quel que soit l'entier naturel *n* : $0 \le x_n - q^n x_0 \le \varepsilon \dfrac{1-q^n}{1-q} < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$.

On obtient notamment un encadrement par deux réels indépendants de l'entier *n* : $0 \le x_n - q^n x_0 < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$.

La suite géométrique définie par : $y_n = x_0\, q^n$, de premier terme $y_0 = x_0$ et de raison *q* répond à la question
Si pour tout entier naturel *n* : $0 \le x_n - q^n x_0 < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$, alors *a fortiori* $0 \le \left|x_n - q^n x_0\right| < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$

Avec ce choix particulier de suite géométrique, on obtient en effet des inégalités sans nécessité d'employer la valeur absolue. Il reste une « marge de manœuvre » …

2.2. Considérons une suite géométrique (y_n) de raison *q* et dont le premier terme y_0 est « intermédiaire » entre x_0 et $\left(x_0 + \dfrac{\varepsilon}{1-q}\right)$, c'est-à-dire vérifie $x_0 \le y_0 < x_0 + \dfrac{\varepsilon}{1-q}$.

Pour tout entier naturel *n* : $y_n = y_0\, q^n$ et $y_n - q^n x_0 = (y_0 - x_0) q^n$ et donc : $0 \le y_n - q^n x_0 < \dfrac{\varepsilon}{1-q} q^n \le \dfrac{\varepsilon}{1-q}$

Pour tout entier naturel *n* : $\left.\begin{array}{l} 0 \le x_n - q^n x_0 < \dfrac{\varepsilon}{1-q} \\ 0 \le y_n - q^n x_0 < \dfrac{\varepsilon}{1-q} \end{array}\right\} \Rightarrow -\dfrac{\varepsilon}{1-q} < x_n - y_n < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$ c'est-à-dire $\left|x_n - y_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{1-q}$

Toute suite géométrique de raison q et de premier terme « intermédiaire » entre x_0 et $\left(x_0+\dfrac{\varepsilon}{1-q}\right)$ répond elle aussi à la question.

Ainsi, il existe une infinité de suites géométriques qui côtoient la suite (u_n) à moins de $\dfrac{\varepsilon}{1-q}$ près. Celle de premier terme $y_0 = x_0$ et de raison q convient mais on peut choisir une suite de même raison et de premier terme « un petit peu plus grand ».

3.1. La suite (u_n) est définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}} = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b_k}{q^k}$

Proposons nous de montrer que la suite (u_n) est une suite croissante et majorée.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{b_n}{q^{n+1}} \geq 0$. La suite (u_n) est une suite croissante.

D'autre part, par hypothèse, pour chaque entier naturel k, $b_k \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq 1$. Majorons dans l'expression de u_n chaque terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b_k}{q^k}$ par $\dfrac{\varepsilon}{q^k}$:

$$u_n \leq \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\varepsilon}{q^k} = \frac{\varepsilon}{q}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{q}\right)^k .$$

On reconnaît la somme des n premières puissances du réel $\dfrac{1}{q}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{q}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}$

Compte tenu que $q > 1$: $0 < \dfrac{1}{q} < 1$, on peut appliquer avec ce réel les résultats vus en **2.1**.

Pour tout entier $n \geq 1$: $0 \leq \dfrac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}} < \dfrac{1}{1-\frac{1}{q}} = \dfrac{q}{q-1}$ et par voie de conséquence : $u_n \leq \dfrac{\varepsilon}{q-1}$

La suite (u_n) est une suite majorée par le nombre réel $\dfrac{\varepsilon}{q-1}$

Etant croissante et majorée, cette suite converge, et sa limite s est telle que $0 < s \leq \dfrac{\varepsilon}{q-1}$

3.2. Soient n et p deux entiers strictement positifs.

$u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$ et $u_{n+p} = \sum_{k=0}^{k=n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$ de sorte que : $u_{n+p} - u_n = \sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{b_k}{q^{k+1}}$

Par hypothèse : $0 \le b_k \le \varepsilon$ pour tous indices. Par encadrement terme à terme : $0 \le u_{n+p} - u_n \le \varepsilon \sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{1}{q^{k+1}}$

Or $\sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{1}{q^{k+1}} = \frac{1}{q} \sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{1}{q^k}$ et par le changement d'index $j = k - n$:

$$\sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{1}{q^k} = \sum_{j=0}^{j=p-1} \frac{1}{q^{n+j}} = \frac{1}{q^n} \sum_{j=0}^{j=p-1} \left(\frac{1}{q}\right)^j = \frac{1}{q^n} \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{1-\frac{1}{q}}$$

Donc : $\varepsilon \sum_{k=n}^{k=n+p-1} \frac{1}{q^{k+1}} \underset{gjulia}{=} \frac{\varepsilon}{q} \times \frac{1}{q^n} \times \frac{1-\frac{1}{q^p}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{q-1}$

NB. Si on ne souhaite pas utiliser la notation sigma :

$$u_{n+p} - u_n = \frac{b_n}{q^{n+1}} + \ldots + \frac{b_{n+p-1}}{q^{n+p}} = \frac{1}{q^n} \times \left(\frac{b_n}{q} + \frac{b_{n+1}}{q^2} + \ldots + \frac{b_{n+p-1}}{q^p} \right)$$

En exploitant les inégalités $0 \le b_{j+n-1} \le \varepsilon$ pour tout indice j, $1 \le j \le p$ (encadrement terme à terme) :

$$0 \le u_{n+p} - u_n \le \frac{\varepsilon}{q^n} \times \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^p} \right) = \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1}{q} \times \left(\frac{1-\frac{1}{q^p}}{1-\frac{1}{q}} \right) = \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{q-1}$$

Quoi qu'il en soit, on retient que quels que soient n et p strictement positifs : $0 \le u_{n+p} - u_n \le \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{q-1}$

L'entier n étant fixé, on passe à la limite quand l'entier p tend vers plus l'infini.

- $\lim_{p \to +\infty} (u_{n+p} - u_n) = s - u_n$ car une translation des indices des termes d'une suite ne change pas la valeur de sa limite.
- $\lim_{p \to +\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^p}{q-1} = \frac{1}{q-1}$

Le passage à la limite conserve, au sens large, le sens d'inégalité : $0 \le s - u_n \le \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1}{q-1}$ pour tout entier naturel n.

3.3. La relation vue à la question **1,** $x_n = \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(q^{n-1-k} b_k\right) + q^n x_0$ .s'écrit également ainsi : $x_n = q^n \sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{b_k}{q^{k+1}}\right) + q^n x_0 \underset{gilbertjulia}{=} q^n u_n + q^n x_0$

De la double inégalité de la question précédente : $0 \le s - u_n \le \frac{\varepsilon}{q^n} \times \frac{1}{q-1}$, on déduit que $s\,q^n \ge u_n\,q^n \ge s\,q^n - \frac{\varepsilon}{q-1}$ donc que pour tout entier naturel n : $(s + x_0)q^n \ge x_n \ge (s + x_0)q^n - \frac{\varepsilon}{q-1}$.

Ainsi pour tout entier naturel n : $\left|(s + x_0)q^n - x_n\right| \le \frac{\varepsilon}{q-1}$.

La suite géométrique $\left((s + x_0)q^n\right)$ de raison q et de terme initial $s + x_0$ répond à la question.

S'il y en avait une autre, disons $\left(y_0\,q'^n\right)$, vérifiant la même inégalité, on aurait pour tout entier n : $\left|(s + x_0)q^n - y_0\,q'^n\right| \underset{gj}{\le} \frac{2\varepsilon}{q-1}$, la différence entre les deux suites resterait bornée. Or, le lemme vu dans le document « Indications » a établi que la différence entre deux suites géométriques distinctes divergentes vers l'infini diverge elle-même vers plus ou moins l'infini. Leur différence étant bornée, les deux suites dont il est question ici sont nécessairement identiques.

La suite géométrique de raison q et de premier terme $s + x_0$ est l'unique suite qui répond à la question.

Problème 2: « Vite pile »

Le « lancer de pièce » n'est dans ce problème qu'un habillage. Retenons qu'on procède à des essais d'une épreuve à deux issues, « Pile » représentant l'une de ces deux issues, celle que l'on recherche particulièrement. La probabilité p peut être n'importe quel réel de l'intervalle $]0\,;1[$.

Posons $q = 1 - p$ pour alléger certaines expressions.

Pour les questions **2** et **3**, on supposera que les k joueurs lancent tour à tour la pièce de monnaie. On appellera « tour de table » le fait que, tour à tour, chaque joueur procède à un lancer.
Le nombre des joueurs ayant obtenu « Pile » au cours d'un même « tour de table » est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(k,\ p)$.

Rien n'empêche non plus de supposer que chaque joueur effectue obstinément les lancers auxquels il a droit, au moins jusqu'à son premier « Pile », même s'il y a des gagnants avant lui. (Ceci, pour pouvoir calculer son score).

1. Soit S la variable aléatoire « score d'un joueur donné ». Cette variable aléatoire prend les valeurs entières depuis 0 (cas où le joueur obtient « Pile » dès son premier essai : son temps d'attente du premier « Pile » est nul) jusqu'à n (le joueur, malchanceux, a effectué tous les essais permis sans jamais avoir obtenu « Pile »).

Pour tout entier i tel que $0 \le i < n$, l'évènement "$S = i$" est réalisé lorsque le joueur a obtenu i fois consécutivement « Face » et ensuite, lors du $(i+1)^{ème}$ lancer, pour la première fois « Pile ».

L'évènement "$S = n$" est quant à lui réalisé lorsque le joueur a obtenu n fois consécutivement « Face ».

Les essais étant indépendants, la loi de probabilité de S est :

- Pour $0 \le i < n$, $P(S = i) = q^i \times p$
- $P(S = n) = q^n$

Vérification possible :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} q^i \times p + q^n = p \times \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = p \times \frac{1-q^n}{p} + q^n = 1.$$

La somme des probabilités des évènements "$S = i$", pour $i = 0,\dots,\ n$ est bien égale à 1.

2. *Deux méthodes de résolution différentes sont proposées*

Première méthode

Numérotons les « tours de table » de 1 à n. Notons U_j $(1 \leq j \leq n)$ l'évènement : « Il survient un unique gagnant lors du « tour de table » numéro j ». Cet évènement est réalisé si et seulement si aucun joueur n'a obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents et, au cours du « tour de table » numéro j, exactement un des joueurs obtient « Pile ».

- La probabilité que aucun des joueurs n'ait obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents est égale à $\left(q^k\right)^{j-1} = q^{k\,j-k}$. (Il y a eu en effet $k \times (j-1)$ lancers de pièce).
- La probabilité que exactement un des joueurs obtienne « Pile » lors du « tour de table » numéro j est égale à $k \times p \times q^{k-1}$ (probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$ prenne la valeur 1).

En raison de l'hypothèse d'indépendance des lancers, les deux évènements ci-dessus sont indépendants, la probabilité que survienne un unique gagnant lors du « tour de table » numéro j est le produit des deux probabilités. C'est le produit : $\left(k \times p \times q^{k-1}\right) \times \left(q^{k\,j-k}\right) =_{gj} k \times p \times q^{k\,j-1}$

On retient que : $P\left(U_j\right) = k \times p \times q^{k\,j-1}$

Il peut éventuellement survenir un unique gagnant lorsque $j=1$ ou $j=2$, …, ou $j=n$.

L'évènement « Il y a un unique gagnant » est la réunion $\bigcup_{j=1}^{j=n} U_j$.

Il s'agit là d'une réunion d'évènements disjoints. La probabilité qu'il y ait un unique gagnant, quel que soit le numéro du « tour de table » auquel il survient, est égale à la somme de leurs probabilités :

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{j=n} U_j\right) = \sum_{j=1}^{j=n} k \times p \times q^{k\,j-1} = \frac{k\,p}{q}\sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j} =_{gj} k \times p \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}$$

Vu que $0 < q < 1$, la limite de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini est $k \times p \times q^{k-1} \times \dfrac{1}{1-q^k}$

Deuxième méthode

Numérotons de 1 à k les différents joueurs.

Notons V_i l'évènement « Le joueur numéro i est unique gagnant de la partie », pour $i = 1, 2, ..., k$.

Le joueur numéro i est unique gagnant lors du « tour de table » numéro j ($1 \leq j \leq n$) si son score est $j-1$ alors que personne d'autre n'a obtenu pile (même pas au tour j).

- La probabilité que son score soit $j-1$ est $q^{j-1} \times p$
- La probabilité qu'aucun des $k-1$ autres joueurs n'ait obtenu pile, même pas au tour j, est $\left(q^j\right)^{k-1} = q^{kj-j}$

La probabilité que le joueur numéro i soit unique gagnant lors du « tour de table » j est le produit des deux probabilités $\left(q^{j-1} \times p\right) \times \left(q^{kj-j}\right) = p \times q^{kj-1}$

L'évènement V_i est la réunion, pour $j = 1, 2, ..., n$ des évènements ci-dessus décrits, évènements qui s'excluent mutuellement. La probabilité de V_i est la somme de leurs probabilités.

$$P(V_i) = \sum_{j=1}^{j=n} p \times q^{kj-1} = \frac{p}{q} \sum_{j=1}^{j=n} q^{kj} = \frac{p}{q} \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{kn}}{1-q^k} .$$

Cette probabilité ne dépend pas de i, c'est la même pour chacun des k joueurs.

L'évènement « Il y a un unique gagnant » (quel que soit son numéro) est la réunion $\bigcup_{i=1}^{i=k} V_i$. Ces évènements sont disjoints : il ne peut pas y avoir plusieurs « uniques gagnants » en même temps.

La probabilité de la réunion de ces évènements est la somme de leurs probabilités :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{i=k} V_i\right) = k \times \frac{p}{q} \times q^{k-1} \times \frac{1-q^{kn}}{1-q^k}$$

On retrouve, ce qui est rassurant, le résultat obtenu par la méthode précédente.

NB. Les deux méthodes illustrent une même démarche : il s'agit de trier les cas où l'évènement « il y a un gagnant unique » se produit, suivant un critère facilitant les calculs de probabilités.

Dans la première méthode, le critère de tri est « à quel moment ? » (i.e. au cours de quel « tour de table » ?). Dans la deuxième méthode, le critère de tri est « qui a gagné ? » (i.e. quel est le numéro du joueur gagnant ?).

3. *Deux méthodes de résolution différentes sont proposées*

Première méthode : On procède à peu près comme à la première méthode la question **2.**

Définissons la variable aléatoire X = « nombre de gagnants » de la partie ». Cette variable peut prendre les valeurs entières de 0 (aucun des joueurs n'obtient jamais « Pile ») à k (tous les joueurs obtiennent « Pile » au même « tour de table »).

Pour mémoire, l'évènement « $X = 0$ » a pour probabilité $q^{k\,n}$ (mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat). Dans la question précédente, nous avons calculé la probabilité de l'évènement « $X = 1$ ».

Soit x un entier tel que $1 \le x \le k$. Proposons-nous de chercher de façon générale la probabilité de l'évènement « $X = x$ ».

Désignons par $U(x,\ j)$ $(1 \le x \le k)$ l'évènement : « Il survient exactement x gagnants lors du « tour de table » numéro j ». Cet évènement est réalisé si et seulement si aucun joueur n'a obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents et, au cours du « tour de table » numéro j, exactement x joueurs obtiennent « Pile ».

- La probabilité que aucun des joueurs n'ait obtenu « Pile » lors des $(j-1)$ « tours de table » précédents est égale à $\left(q^k\right)^{j-1} = q^{k\,j-k}$.
- La probabilité que exactement x joueurs $(1 \le x \le k)$ obtiennent « Pile » au cours du « tour de table » numéro j est est égale à $\binom{k}{x} p^x\, q^{k-x}$ (probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$ prenne la valeur x).

La probabilité qu'il y ait exactement x gagnants lors du « tour de table » numéro j est le produit des deux probabilités, c'est-à-dire : $P(U(x,\ j)) \underset{gj}{=} \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times q^{k\,j-k}$. Laissons cette expression en l'état …

Il peut survenir x gagnants lorsque $j = 1$ ou $j = 2$, …, ou $j = n$.

L'évènement « $X = x$ » est la réunion : $["X = x"] = \bigcup_{j=1}^{j=n} U(x,\ j)$. Il s'agit là d'une réunion d'évènements disjoints.

La probabilité qu'il y ait x gagnants de la partie, quel que soit le numéro du « tour de table » auquel la parie se termine, est égale à la somme de ces probabilités :

$$P[X = x] = \sum_{j=1}^{j=n} \left[\binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times q^{k\,j-k}\right] = \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \sum_{j=1}^{j=n} q^{k\,j-k} = \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}$$

L'espérance mathématique du nombre de gagnants est la somme :

$$\sum_{x=0}^{x=k} (x \times P[X = x]) = \sum_{x=1}^{x=k} \left[x \times \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x} \times \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k}\right] \underset{gilbertjulia}{=} \frac{1-q^{k\,n}}{1-q^k} \times \sum_{x=1}^{x=k} \left[x \times \binom{k}{x} p^x\, q^{k-x}\right]$$

La somme qui apparaît dans cette dernière expression représente l'espérance mathématique d'une variable aléatoire suivant la loi $B(k,\ p)$. Elle est égale à $k\,p$.

L'espérance mathématique du nombre de gagnants est de ce fait $k \times p \times \dfrac{1-q^{kn}}{1-q^k}$

Vu que $0 < q < 1$, la limite de cette espérance lorsque n tend vers l'infini est $k \times \dfrac{p}{1-q^k}$

Deuxième méthode : on reprend la deuxième méthode de la question **2**, puis on s'en écarte sensiblement.

Numérotons de 1 à k les différents joueurs.

Un joueur donné est gagnant (pas forcément unique) lors du « tour de table » numéro j ($1 \leq j \leq n$) si son score est $j-1$ alors que personne d'autre n'a obtenu pile avant lui.

- La probabilité que son score soit $j-1$ est $q^{j-1} \times p$
- La probabilité qu'aucun des $k-1$ autres joueurs n'ait obtenu pile avant lui est $\left(q^{j-1}\right)^{k-1} = q^{kj-j-k+1}$

La probabilité que ce joueur donné soit gagnant (pas forcément unique) lors du « tour de table » j est le produit des deux probabilités $\left(q^{j-1} \times p\right) \times \left(q^{kj-j-k+1}\right) = p \times q^{kj-k}$

La probabilité que ce joueur soit gagnant lors d'un quelconque « tour de table » est égale à la somme : $\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} q^{kj-k} \times p = \sum_{j-1=0}^{j-1=n-1} q^{k(j-1)} \times p = p \times \frac{1-q^{kn}}{1-q^k}$.

Cette probabilité est la même pour chacun des k joueurs.

Cependant les évènements « le joueur numéro i est gagnant » pour $i = 1, 2, \ldots, k$ ne sont pas des évènements incompatibles, il peut y avoir plusieurs gagnants en même temps.

C'est la raison pour laquelle on raisonnera désormais en termes d'espérance. L'espérance a une propriété majeure : elle est linéaire et, en particulier, l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances, quelles que soient les circonstances.

Désignons par G_i la variable aléatoire qui vaut 1 si joueur numéro i gagne la partie et 0 sinon ($i = 1, 2, \ldots, k$).

L'espérance mathématique de G_i est : $E(G_i) = 1 \times \left(p \times \dfrac{1-q^{kn}}{1-q^k}\right) + 0 \times \left(1 - p \times \dfrac{1-q^{kn}}{1-q^k}\right)_{\text{gilbertjulia}} = p \times \dfrac{1-q^{kn}}{1-q^k}$

La variable aléatoire somme $G_1 + \ldots + G_k$ représente le nombre de joueurs gagnants.

L'espérance mathématique du nombre de joueurs gagnants est la somme des espérances des variables aléatoires G_i étendue à l'ensemble des k joueurs.

$$E(G_1 + G_2 + \ldots + G_k) = E(G_1) + \ldots + E(G_k) = k \times \left(p \times \frac{1-q^{kn}}{1-q^k}\right)$$

On retrouve, ce qui est rassurant, le résultat obtenu par la méthode précédente.

Problème 3 : chiffres et lettres

Soit d un entier strictement positif.

- Un mot est un bloqueur de d si toute attribution de ce mot est un nombre non divisible par d.
- Un mot n'est pas un bloqueur de d s'il existe une attribution de ce mot divisible par d.

Ce nombre d est « mauvais » s'il admet au moins un bloqueur, c'est-à-dire s'il existe un mot dont toute attribution est non divisible par d.

Ce nombre d est « bon » s'il n'admet aucun bloqueur, c'est-à-dire si tous les mots ont au moins une attribution divisible par d.

1. Les attributions de AB sont tous les entiers à deux chiffres qui s'écrivent avec deux chiffres distincts : 10, 12, …, 21, 23, … 98 c'est-à-dire tous les entiers compris entre 01 et 98 à l'exception de 11, 22, 33, …, 88.

Soit d un entier s'écrivant avec au moins trois chiffres ($d \geq 100$). À l'exception de zéro, tous les multiples de d s'écrivent avec au moins autant de chiffres que d.

L'unique multiple d'un tel entier qui soit compris entre 0 et 99 est l'entier zéro qui n'est pas une attribution de AB. Toute attribution de AB est un nombre non divisible par d.

Donc AB est un bloqueur de tout entier ≥ 100. Tous les entiers supérieurs ou égaux à 100 sont mauvais.

2.1. Quel que soit le mot ω, de dernière lettre x, toutes ses attributions telles que $x = 0$ sont divisibles par 10. L'entier 10 n'admet aucun bloqueur, il est bon.

2.2. Les entiers divisibles par 8 sont ceux dont l'entier représenté par ses trois derniers chiffres est lui même divisible par 8.

Pour savoir si 8 est bon ou non, il suffit de tester les mots ω s'écrivant avec trois lettres. Possèdent-ils tous une attribution divisible par 8 ?

Il y a cinq mots à trois lettres qui sont *AAA, AAB, ABA, BAA, ABC*.

Or par exemple, les entiers 000 ou 888, 008 ou 448, 080 ou 808, 400 ou 800, 016 ou 056 sont, respectivement, des attributions des mots de trois lettres *AAA, AAB, ABA, BAA, ABC*.

Toutes ces attributions sont divisibles par 8. Il en résulte que 8 n'admet pas de bloqueur. Il est bon.

2.3. Un entier divisible par 27 est *a fortiori* divisible par 9.

Les attributions de AAB qui sont divisibles par 9 sont celles dont la somme des chiffres est multiple de 9 : 009, 117 = 13×9, 225 = 25×9, 441 = 49×9, 558 = 62×9, 774 = 86×9, 882 = 98×9, 990 = 110×9. (333, 666 ou 999 ne conviennent pas, deux chiffres distincts sont requis).

Aucune d'entre elles n'est divisible par 27 (en effet, aucun des diviseurs complémentaires 13, 25, 49, 62, 86, 98 ou 110 n'est un multiple de 3). Il en résulte que AAB est un bloqueur de 27.

Le nombre 27 est mauvais.

2.4. Soient *a, b* deux chiffres distincts et $\overline{abbab}$ l'attribution de *ABBAB* associée. Cet entier est divisible par 32 si et seulement si $\overline{abbab} \equiv 0 \quad (32)$.

Or : $\overline{abbab} = a \times 10010 + b \times 1101 \underset{gj}{\equiv} 26a + 13b \quad (32)$.
(En effet : $10010 = 312 \times 32 + 26$ et $1101 = 34 \times 32 + 13$)

On remarque que $26a + 13b = 13(2a + b)$.
Les entiers 13 et 32 étant deux entiers premiers entre eux : $13(2a + b) \equiv 0 \ (32) \Leftrightarrow \ 2a + b \equiv 0 \ (32)$

Or, il n'existe aucun couple de chiffres distincts tels que $2a + b$ soit divisible par 32 (en effet l'entier $2a + b$ est nécessairement compris entre $2 \times 0 + 1 = 1$ et $2 \times 9 + 8 = 26$, aucun de ces entiers n'est divisible par 32). Donc, aucune attribution de *ABBAB* n'est divisible par 32, ce mot est un bloqueur de 32.

Le nombre 32 est mauvais.

2.5. 32 est mauvais alors que l'un de ses diviseurs, en l'occurrence 8, est bon. Un diviseur positif d'un nombre mauvais n'est pas nécessairement mauvais.

Soit *b* un nombre bon et *u* un diviseur positif de *b*. Tous les mots ont au moins une attribution divisible par *b* et cette attribution est *a fortiori* divisible par le diviseur de *b* qu'est l'entier *u*. Donc tout diviseur positif d'un nombre bon est bon.

Par contraposition, tous les multiples d'un nombre mauvais sont mauvais.

3.1. On remarque que dans le mot ω de cette question, chacune des dix lettres disponibles apparaît au moins une fois, neuf d'entre elles apparaissant une fois et une seule..

Si on considère une attribution *a* de ω, les chiffres *J, I, …, B* sont exactement ceux de rangs respectifs $p-1$; $2(p-1)$; ...;$9(p-1)$ dans l'écriture de *a*.

Il s'ensuit que le premier chiffre à droite de chacun des 10 blocs « A^{p-2} » est associé à des puissances remarquables de dix :10^0 ; 10^{p-1} ;....;$10^{9(p-1)}$.

$$a \underset{gilbertjulia}{=} \left(AAA^{p-2}\right) \times 10^{9(p-1)} + \left(BA^{p-2}\right) \times 10^{8(p-1)} + \ldots + \left(IA^{p-2}\right) \times 10^{p-1} + \left(JA^{p-2}\right)$$

Puisque *p* est un nombre premier distinct de 2 et de 5, d'après le petit théorème de Fermat, chacune de ces puissances 10^0 ; 10^{p-1} ;....;$10^{9(p-1)}$ est congrue à 1 modulo *p*.

En conséquence : $a \equiv \left(AAA^{p-2}\right) + \left(BA^{p-2}\right) + \left(CA^{p-2}\right) + \ldots + \left(JA^{p-2}\right) (p)$

On note d'une part que $\left(AAA^{p-2}\right) = A \times 10^p + \left(AA^{p-2}\right) \equiv 10A \ (p)$ (les parenthèses pour $\left(AAA^{p-2}\right)$ et $\left(AA^{p-2}\right)$ désignent ici des écritures en numération décimale).

Nous sommes d'autre part amenés à étudier particulièrement les attributions d'un mot de la forme $\left(XA^{p-2}\right)$.

Si *b* est une telle attribution : $b = \left(1 + 10 + \ldots + 10^{p-3}\right)A + 10^{p-2}X$

D'après le petit théorème de Fermat, $10^{p-1}-1=9\left(1+10+10^2+...+10^{p-2}\right)$ est divisible par p.

Puisque p est par hypothèse un nombre premier supérieur ou égal à 7, il est premier avec 9, donc (théorème de Gauss) il divise $1+10+10^2+...+10^{p-2}$

Ainsi : $1+10+10^2+...+10^{p-3}+10^{p-2}\equiv 0\ (p)$ c'est-à-dire que $1+10+10^2+...+10^{p-3}\equiv -10^{p-2}\ (p)$.

On en déduit : $b\equiv_{gj}\ (X-A)10^{p-2}\ (p)$

En appliquant ce résultat à chacun des neuf mots $\left(BA^{p-2}\right);\left(CA^{p-2}\right);...+\left(JA^{p-2}\right)$:

$a\equiv 10A+\left((B-A)+(C-A)+...+(J-A)\right)10^{p-2}\ \ (p)$ et finalement $a\equiv (A+B+C+...+J)10^{p-2}\ \ (p)$

La somme des dix chiffres de la numération décimale $0+1+2+...+9$ étant égale à 45 :
$a\equiv 45\times 10^{p-2}\ \ (p)$, et lorsque p est un nombre premier supérieur ou égal à 7, l'entier $45\times 10^{p-2}$ est premier avec p puisque les facteurs premiers de $45\times 10^{p-2}$ sont uniquement 2, 3 et 5.

Aucune attribution de ω ne peut être divisible par p. Le mot ω est un bloqueur de p.

Tous les nombres premiers autres que 2, 3 et 5 sont mauvais.

3.2. Dans la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre bon, il ne peut y avoir aucun nombre premier autre que 2, 3 ou 5. Sa décomposition est de la forme $2^x3^y5^z$ avec $x<5$; $y<3$; $z<3$ puisqu'on a vu que 32, 27 et 125 pour diverses raisons sont mauvais.

De plus, ce nombre est < 100. Les nombres susceptibles d'être bons sont :
1, 2, 4, 8, 16 ainsi que 3, 6, 12, 24, 48, ou 5, 10, 20, 40, 80 ou 9, 18, 36, 72 ou 15, 30, 60 ou 45, 90 ou 25, 50 ou 75. Ce qui fait 27 nombres.

4.1. En règle générale, un entier est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres autres que le chiffre 9.

La règle de remplacement suggérée ici revient à augmenter d'une unité tout chiffre c autre que 9 puis à prendre le nombre compris entre 0 et 8 auquel $c+1$ est congru modulo 9 (en effet 8 est remplacé par zéro qui est congru à $(8+1)$ modulo 9)

Si k est le nombre d'apparitions du 9 dans l'écriture de a, il y a $n-k$ autres chiffres dans cette écriture. La somme des chiffres est, modulo 9, augmentée de $n-k$ unités.

Ainsi : $a'\equiv r+(n-k)\quad (9)$

4.2. On va montrer que l'on peut obtenir une attribution qui est congrue à 0 modulo 9.

En pratiquant de 0 à 8 fois la permutation circulaire annoncée on obtient des attributions qui sont congrues successivement à $r+(n-k)$; ... ; $r+8(n-k)$.

Si l'entier k n'est pas congru à n modulo 3, l'entier $n-k$ est premier avec 9 et ses multiples $0\ ;\ (n-k)\ ;...;8(n-k)$ sont congrus (dans un certain ordre) une fois et une seule à chacun des entiers 0 ; 1 ; 2 ; … ; 8 modulo 9.

Dans ce cas, quel que soit l'entier r, un et un seul des entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ est congru à 0 modulo 9. Il existe par conséquent exactement une attribution qui est divisible par 9.

4.3. Si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9, les entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ sont congrus à l'un ou l'autre des entiers $r\ ;\ r+3\ ;\ r+6$ (on les obtient trois fois chacun).

Si r est congru à 0 modulo 3, alors l'un des trois entiers $r\ ;\ r+3\ ;r+6$ est congru à 0 modulo 9, et on obtient une attribution qui est divisible par 9 (et même on en obtient trois).

Si ce n'est pas le cas, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture de a n'est pas congru à n modulo 3 (sinon, r serait multiple de 3). Soit a_1 l'attribution de ω obtenue en permutant dans l'écriture ce chiffre avec le chiffre 9. Cette fois, dans cette nouvelle attribution, le nombre d'apparitions du chiffre 9 n'est plus congru à n modulo 3. On obtient une attribution qui ramène au cas étudié dans **4.2.**

4.4. Il reste à montrer que l'on peut obtenir une attribution de ω qui est divisible par 9 même si k est congru à n modulo 9.

Dans ce cas, tous les entiers $r\ ;\ r+(n-k)\ ;...;r+8(n-k)$ sont congrus à r modulo 9. Si r est congru à 0 modulo 9, alors toutes les attributions obtenues sont divisibles par 9. Sinon, il existe au moins un chiffre autre que 9 dont le nombre d'apparitions dans l'écriture n'est pas congru à n modulo 9 (sinon r serait multiple de 9). On permute ce chiffre avec le 9 pour obtenir une nouvelle attribution qui ramène au cas **4.3** ou au cas **4.2**.

Dans tous les cas de figure, on peut construire une attribution de ω qui est divisible par 9, ce qui prouve qu'aucun mot n'est bloqueur de 9. Par conséquent, 9 est bon.

5. On peut essayer de compléter le raisonnement de la question 4 en montrant que pour tout mot ω, on peut construire une attribution de ω qui est non seulement divisible par 9 mais aussi paire.

Soit donc ω un mot et a une attribution de ω qui est divisible par 9 (la question précédente montre qu'il y en a au moins une). Soit n sa longueur, r la somme de ses chiffres et x_i le nombre d'apparitions du chiffre i ($i=0,1,...,9$) dans l'écriture de a. (Par conséquent : $r=\sum_{i=0}^{9} i\times x_i \equiv 0\ (9)$)

Si le dernier chiffre de a est pair, cette attribution est multiple de 18, la question est réglée.

Si ce n'est pas le cas, on remplace les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 par respectivement les chiffres 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Cette permutation revient à remplacer le chiffre i par le chiffre $9-i$ et a pour effet de remplacer un chiffre pair par un impair et inversement. Cette nouvelle attribution a pour somme de chiffres :

$\sum_{i=0}^{9}(9-i)\times x_i \underset{gjulia}{=} \sum_{i=0}^{9} 9x_i - \sum_{i=0}^{9} i\times x_i = 9n-r$. Si r est divisible par 9, il en est de même de $9n-r$. On obtient une nouvelle attribution multiple de 9 et dont le dernier chiffre est pair, elle est multiple de 18.

Aucun mot ne bloque 18, 18 est bon.

6. Soit m un nombre « mauvais ». Il admet au moins un bloqueur ω dont toute attribution est un entier non divisible par m. Soit n la longueur de ω.

On peut s'intéresser aux mots obtenus en accolant les uns aux autres des « ω ».

Si on considère par exemple le mot $\omega\omega$, à toute attribution a de ω correspond une attribution $\overline{aa} = a \times (1+10^n)$ de ce mot. Dans le cas où m est premier avec $1+10^n$, l'entier m ne peut diviser $a \times (1+10^n)$, sinon d'après le théorème de Gauss, puisqu'il est premier avec $1+10^n$, il diviserait a, ce qui est exclu. Le mot $\omega\omega$ est dans ce cas lui aussi un bloqueur de m.

Si plus généralement on considère le mot $\omega\omega\ldots\omega$ où ω est répété k fois $(k>1)$, à toute attribution a de ω correspond une attribution $\overline{aa....a} = a \times (1+10^n+...+10^{(k-1)n})$ de ce mot.

On reconnaît une expression de la forme : $\overline{aa....a} = a \times s_k$ vue dans le lemme évoqué dans le document « indications » avec $q = 10^n$.

En particulier, si on effectue j_k répétitions (avec les notations du lemme) : $\overline{aa....a} = a \times w_k$

L'entier m ne possède qu'un nombre fini de diviseurs. Il n'admet donc de diviseurs communs autres que 1 qu'avec un nombre fini d'entiers w_k et il est premier avec tous les autres. Pour tous ceux-là (il y en a une infinité), m ne peut diviser $a \times w_k$ sinon, d'après le théorème de Gauss il diviserait a ce qui est exclu. Les mots ainsi formés sont tous des bloqueurs de m.