Concours Général 2012 : Problème 2

1. L'énoncé : une suite majoritairement décroissante

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs telle que $u_0 = 1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes u_0, u_1,..., u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$.

Montrer que u_n tend vers zéro.

Fin de l'énoncé

De façon générale, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite conforme à l'énoncé, dire que « pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes u_0, u_1,..., u_{n-1} soient supérieurs ou égaux à $2u_n$ » signifie que :

- $u_1 \leq \frac{1}{2}$ car u_1 n'a qu'un terme précédent qui est u_0.
- $u_2 \leq \frac{1}{2}$ car u_2 a deux précédents : u_0 et u_1 qui est plus petit que $\frac{1}{2}u_0$.
- $u_3 \leq \frac{1}{2}\max(u_1, u_2)$ car u_3 a trois précédents : u_0, u_1 et u_2, les deux termes u_1 et u_2 étant tous deux plus petits que $\frac{1}{2}u_0$. Donc $u_3 \leq \frac{1}{4}$
- …

Vous pouvez traiter le paragraphe suivant ou bien aller directement au paragraphe 3.

2. Etude (facultative) d'une suite auxiliaire

On se propose d'étudier la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ de premier termes $w_0 = 1$ et telle que :

Pour tout entier $k \geq 1$: $w_{2k} = w_{2k-1} = \frac{1}{2}w_{k-1}$.

Cette suite vérifie en quelque sorte « a maxima » la condition imposée par l'énoncé.

1. Calculer w_n pour $1 \leq n \leq 7$

2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante.

3. Donner une expression de w_n en fonction de n (on pourra désigner par p l'entier naturel vérifiant $2^p - 1 \leq n < 2^{p+1} - 1$ et donner une expression de w_n en fonction de l'entier p).

4. Etablir que $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$

5. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ vérifie la condition de l'énoncé.

6. *Application* : Démontrer maintenant que, si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite vérifiant la condition de l'énoncé, alors pour tout entier naturel n : $u_n \leq w_n$. Conclure.

3. Démonstration directe

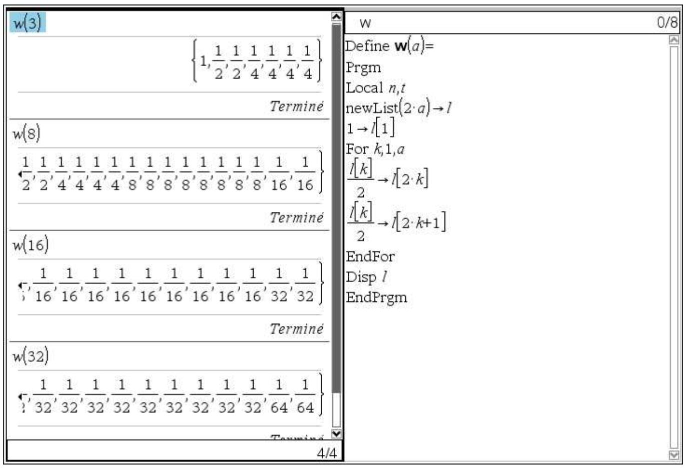
Pour démontrer qu'une suite « majoritairement décroissante » converge vers zéro, vous pouvez aussi tenter de majorer directement u_n, sans passer par l'étude progressive de la suite auxiliaire.

Pour cela, commencez par traiter les cas des premiers termes pour comprendre « comment ça marche ». Continuez le raisonnement ébauché dans le paragraphe 1 (jusqu'à u_7 par exemple) en examinant quels termes de la suite figurent dans un ensemble « contenant au moins la moitié des précédents » (s'intéresser au terme de plus grand indice de ces ensembles). Puis construisez une démonstration par récurrence. Vous pouvez tenter de démontrer que quel que soit l'entier naturel p, pour tout entier n vérifiant $2^p - 1 \leq n < 2^{p+1} - 1$, on a : $u_n \leq \frac{1}{2^p}$.

4. Résolution de la question 1 (suite auxiliaire)

Programmation de la suite (w_n) et calcul des premiers termes

Le programme **w** crée une liste de $2a$ éléments. Le premier élément de la liste est égal à 1, c'est w_0. Pour k allant de 1 à a, les éléments précédant $l[2k]$ et $l[2k+1]$ (ce sont respectivement w_{2k-1} et w_{2k}) sont définis comme étant égaux à $\frac{1}{2} l[k]$ (c'est-à-dire $\frac{1}{2} w[k-1]$).

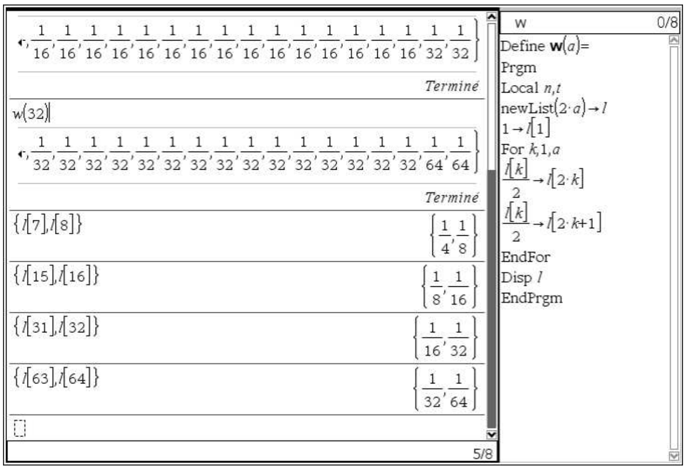


Le lien entre les termes de la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ et ceux de la liste l est en général que : $w_n = l[n+1]$.

Par construction :

$w_2 = l[3] = w_1 = l[2] = \frac{1}{2} l[1] = \frac{1}{2} w_0$. Puis, les quatre termes qui suivent sont égaux à $\frac{1}{4}$.

La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est telle que : $w_2 = w_1 = \frac{1}{2}$ puis $w_3 = \ldots = w_6 = \frac{1}{2^2}$ puis $w_7 = \ldots = w_{14} = \frac{1}{2^3}$, puis $w_{15} = \ldots = w_{30} = \frac{1}{2^4}$ puis $w_{31} = \ldots = w_{62} = \frac{1}{2^5}$



A vous maintenant.