Autour du concours général 2012, problème 3
Enoncé et conjectures

1. L'énoncé

Le facteur sonne toujours une fois (et une seule)

Un facteur doit distribuer le courrier dans une rue. Celle-ci ne comporte qu'une seule rangée de maisons régulièrement espacées et numérotées 1, 2,…, n où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Le facteur doit distribuer une lettre par maison. Pour cela, il commence par laisser son vélo à la maison 1 et y laisse la lettre correspondante ; puis il distribue les autres lettes dans les autres maisons et revient enfin à la maison 1 récupérer son vélo. Il effectue ainsi un trajet, représenté par les numéros successifs où il a déposé le courrier.

Par exemple, si $n=5$, un trajet possible est 1, 5, 2, 4, 3, 1. La distance totale parcourue, appelée longueur du trajet, vaut 12 car dans ce cas $|5-1|+|2-5|+|4-2|+|3-4|+|1-3|=12$.
Un autre trajet possible est 1, 3, 5, 4, 2, 1, de longueur 8.

1.1. Combien y a-t-il de trajets possibles ?

1.2. *Montrer que la longueur de tout trajet est un nombre pair*[1].

2.1. Montrer que tout trajet est de longueur supérieure ou égale à $2(n-1)$

2.2. Combien y a-t-il de trajets de longueur minimale ?

3.1. Dans les cas $n=5$ et $n=6$ déterminer la longueur maximale d'un trajet et donner un exemple de trajet de longueur maximale.

3.2. Pour n quelconque, déterminer la longueur maximale d'un trajet.

4. On tire un trajet au hasard (tous les trajets sont équiprobables). Quelle est l'espérance de la longueur du trajet ?

[1] Question ajoutée, ne figure pas dans l'énoncé original

2. Quelques conjectures à propos des questions 1 à 3

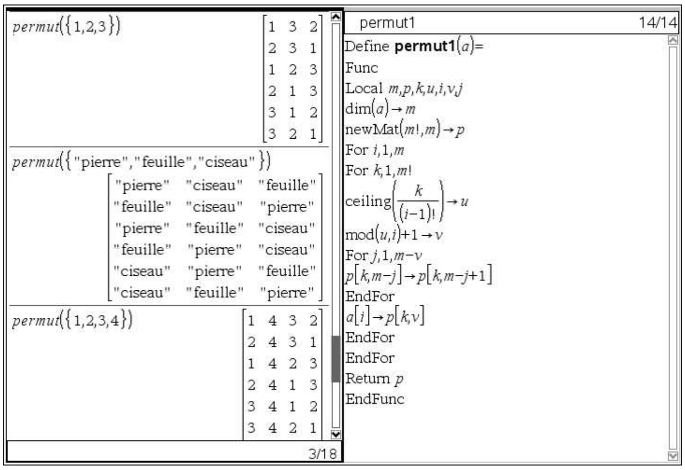
Un « trajet » peut être défini par une liste $\{1,\ \sigma(2),\ \sigma(3),\ldots,\ \sigma(n),\ 1\}$ de $(n+1)$ nombres où σ représente une permutation de l'ensemble $\{2,\ 3,\ldots,\ n\}$, $\sigma(i)$ (avec $i = 2,\ 3,\ldots,\ n$) désignant les numéros des maisons où le facteur dépose successivement le courrier.

2.1. Préliminaire : liste des permutations d'un ensemble

Dans un premier temps, nous allons construire une fonction nommée **permut** dont l'argument est une liste a. Cette fonction renverra la matrice p dont les lignes sont toutes les permutations des éléments de la liste a. Si m est le nombre d'éléments de la liste a, la matrice p sera composée de $m!$ lignes et m colonnes.

N'espérons pas de miracle, cette fonction sera utilisable uniquement pour $m \leq 6$ (cas où la réponse sera quand même une matrice à 720 lignes …)

L'idée générale de construction de la fonction est de préparer une matrice p de taille $m! \times m$ où m est le nombre d'éléments de a puis d'y insérer l'un après l'autre les éléments de la liste a en répertoriant toutes les dispositions relatives possibles de ces éléments.

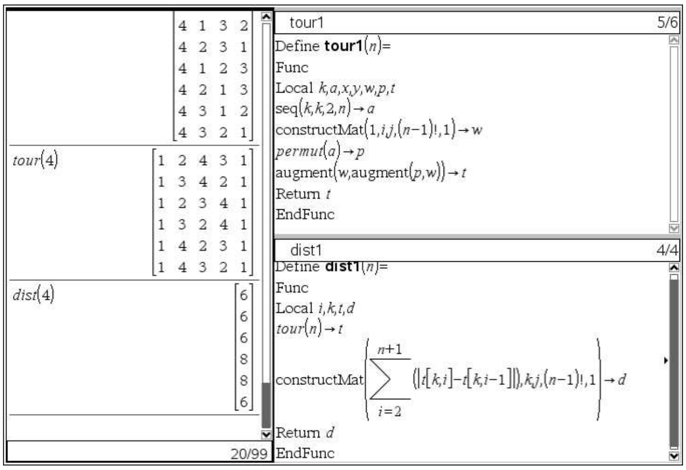


2.2. Matrice des trajets et vecteur distances parcourues

A chaque entier n associons la la liste : $a = \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$. La fonction **permut** construit la matrice des permutations de a. Si nous complétons cette matrice par une première colonne et une dernière colonne de « 1 », nous obtiendrons tous les trajets possibles du facteur, partant de la maison 1 et revenant à la maison 1.

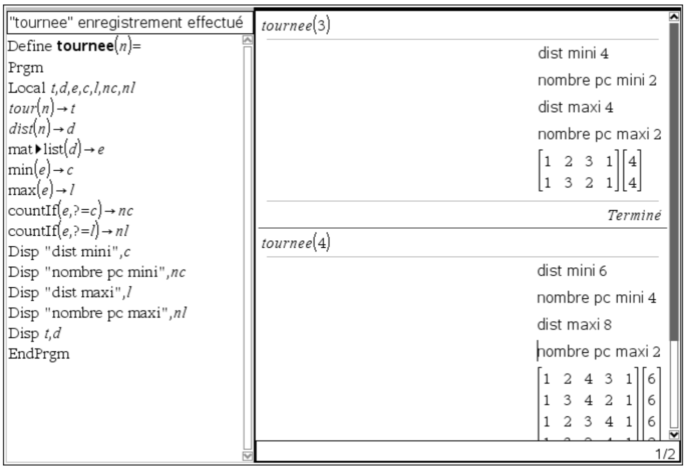
La fonction **tour**, d'argument le nombre n de maisons que le facteur doit visiter, renvoie une matrice de taille $(n-1)! \times (n+1)$ dont chaque ligne représente un trajet possible du facteur.

Quant à la fonction **dist**, elle calcule la longueur des trajets obtenus à l'aide de la fonction **tour**. Elle renvoie une matrice-colonne.



Les résultats utiles peuvent être résumés et consignés dans un programme nommé **tournee**.

On y calcule la distance parcourue minimale, le nombre de parcours minimaux, la distance parcourue maximale, le nombre de parcours maximaux, puis on fait afficher la matrice des trajets et la matrice-colonne de leurs longueurs.



En première lecture, nous pouvons remarquer que toutes les longueurs de trajets sont en effet des nombres pairs. La longueur minimale des trajets obtenue pour les cas $n=3$ et $n=4$ amène à conjecturer qu'en général, cette longueur minimale semble égale à $2(n-1)$.

Il reste à appliquer ces fonctions aux cas $n=5$ et $n=6$ pour émettre des conjectures plus précises à propos de la question **3**, chose que le lecteur ne manquera pas de faire.

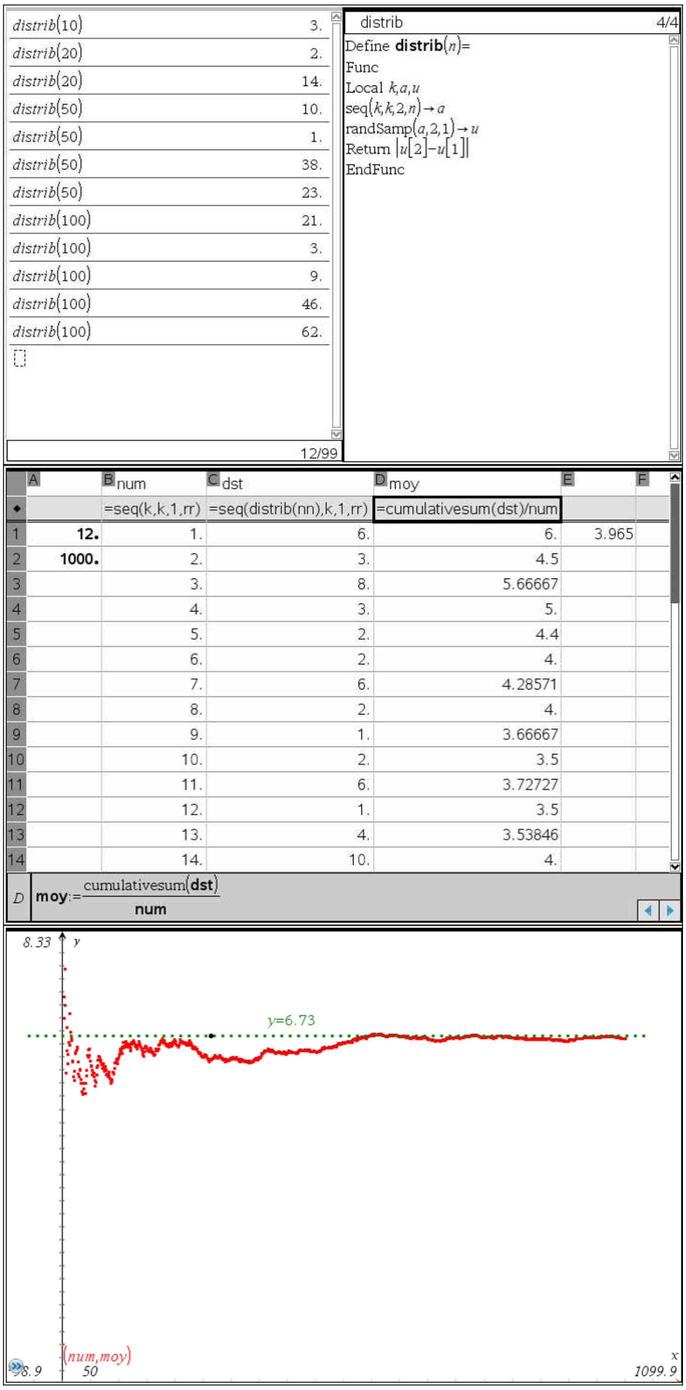
3. Simulations à propos de la question 4

Pour cette question, considérons deux simulations.

3.1. Distance parcourue en moyenne pour se rendre d'une maison à une autre

Nous allons d'abord simuler l'expérience suivante : choisir au hasard deux maisons parmi $a=\{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ et noter la distance séparant ces deux maisons.
Nous répèterons cette expérience un assez grand nombre de fois, et nous calculerons la distance moyenne séparant les deux maisons choisies.

La fonction **distrib** renvoie la distance entre deux maisons choisies au hasard parmi n maisons.
L'instruction $\text{RandSamp}(\text{liste } a, \text{nombre } k, 1)$, lorsqu'elle est affectée d'un troisième argument égal à 1 renvoie un arrangement de k éléments (c'est-à-dire tous distincts) tirés au hasard de la liste a.
Ainsi, $\text{RandSamp}(a, 2, 1)$ renvoie deux éléments distincts tirés de la liste a. On calcule alors la distance entre ces deux éléments.



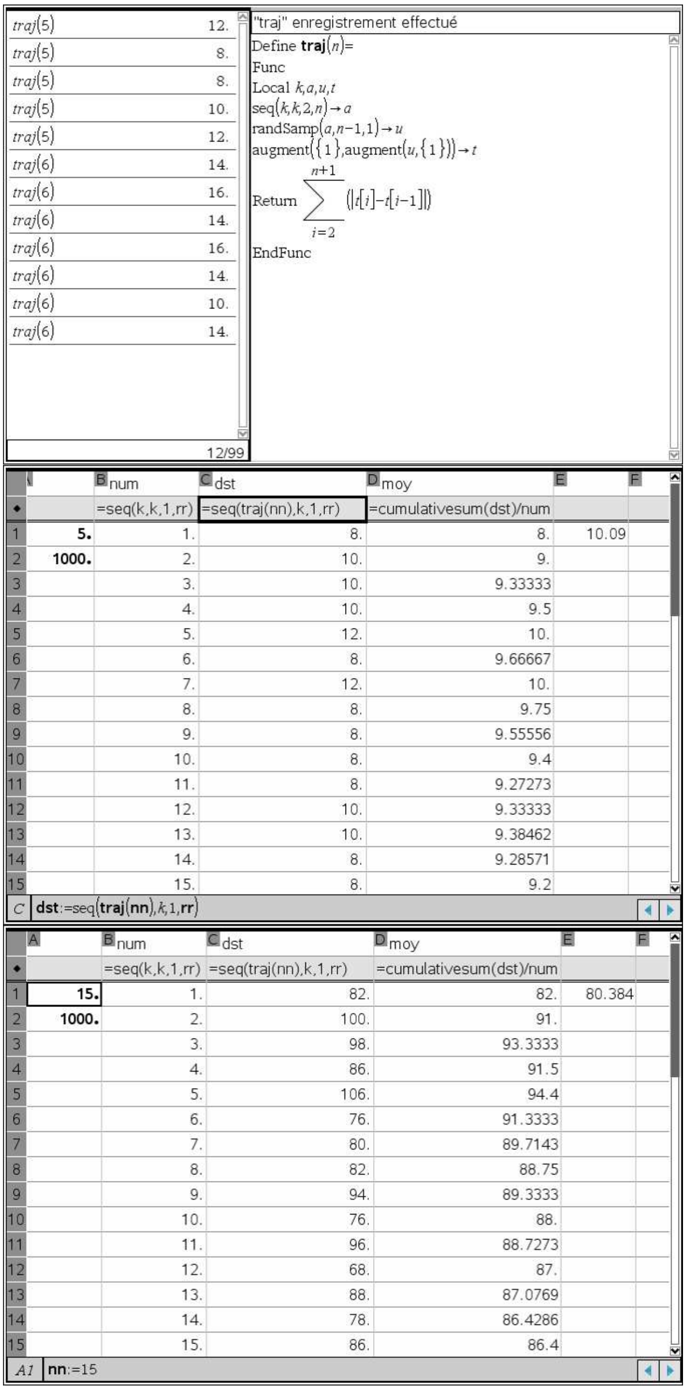
Dans une page **Tableur**, nous simulons cette expérience un assez grand nombre de fois (1000 fois sur l'écran ci-contre, nombre inscrit en cellule A2 et stocké en variable **rr**). L'entier n est ici 12 (inscrit en cellule A1 et stocké en variable **nn**). La colonne **num** numérote les essais, la colonne **dist** indique les distances relevées entre les deux maisons choisies, et la colonne **moy** calcule la distance moyenne obtenue jusqu'à ce moment de l'expérience. La dernière moyenne, c'est-à-dire le nombre **moy(rr)**, est notée pour mémoire en cellule E1. Pour cette fois, nous avons trouvé 3,965.

Il est possible de représenter graphiquement la liste des moyennes de distance parcourue. Ci-contre un exemple de représentation graphique lorsque l'entier n est égal à 20 (dans la page tableur, nous avons stocké 20 en variable **nn** et avons provoqué un recalcul). Le nuage de points a été ensuite ajusté empiriquement (environ 6,73 comme moyenne).

Nous laissons au lecteur le soin d'émettre ses propres conjectures sur la valeur de l'espérance de la distance entre deux maisons choisies au hasard.

2.2. Longueur moyenne des trajets

Simulons maintenant l'expérience consistant à déposer toutes les lettres les unes après les autres, en partant de la maison 1 et en y revenant.



La fonction **traj** simule le choix au hasard d'un trajet et le calcul de la longueur de ce trajet.

L'instruction RandSamp$(a, n-1, 1)$ renvoie en effet une permutation des éléments de la liste $a = \{2,\ 3,\ ...,\ n\}$ puisque cette liste contient précisément $n-1$ éléments. Elle simule l'ordre de dépôt du courrier dans les maisons 2 à n. On complète la liste avec un « 1 » en début et en fin de liste. On termine en calculant la distance totale parcourue.

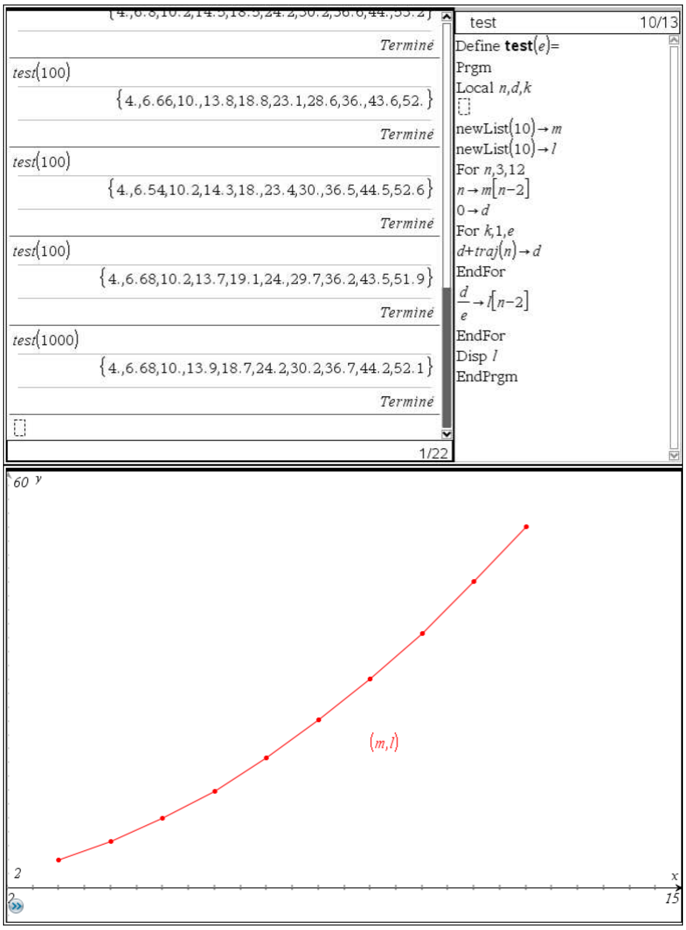
Dans la page **Tableur**, il suffit de remplacer dans la ligne de saisie de la colonne **dist** la fonction « **distrib** » par la fonction « **traj** ».

Ci contre, on a choisi $n = 5$.
Peut-être peut-on conjecturer que l'espérance mathématique de la longueur des trajets est $2n$?

Non !

Le programme **test** a pour but de simuler une série d'un assez grand nombre *e* de trajets pour diverses valeurs de *n*, en l'occurrence pour les entiers 3, 4, …, 12.

On a choisi d'abord $e = 100$ puis $e = 1000$ pour lancer le programme.



Une représentation graphique des moyennes obtenues pour les valeurs 3, 4, …, 12 de l'entier *n* donne une meilleure idée du type de lien entre *n* et l'espérance de la longueur des trajets.

Nous laissons là aussi au lecteur le soin d'émettre ses propres conjectures

Il vous reste à traiter vous-même le problème et à confronter vos résultats théoriques avec ceux de cette expérimentation. Je ne mets pas en ligne mon corrigé du problème. Si ce document vous intéresse, adressez-moi un courriel (voir en page d'accueil), je vous enverrai ce document en fichier joint format pdf.