Concours général 2011 . Eléments de correction

Problème 1 : C'est dans la boîte

On obtient la valeur maximale de a lorsque les sommets du rectangle $ABCD$ sont sur les côtés du rectangle $EFGH$ (si un des sommets était strictement intérieur une composée convenable rotation-translation permettrait d'insérer strictement les quatre sommets de $ABCD$ dans $EDGH$, dégageant ainsi une petite marge).

Supposons qu'il en soit ainsi. Posons $EA = x$; $EB = y$. Les triangles AHD et CFB sont isométriques et semblables au triangle AEB. Désignons par k le rapport de similitude entre AEB et les deux petits triangles : $HD = BF = k\,x$; $AH = CF = k\,y$; $AD = BC = k\,AB = 7k$.

On cherche à déterminer la valeur de AD, ce qui revient à déterminer celle de k.

Les trois réels strictement positifs x, y, k sont solutions du système d'équations : $\begin{cases} x + k\,y = 6 \\ k\,x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases}$

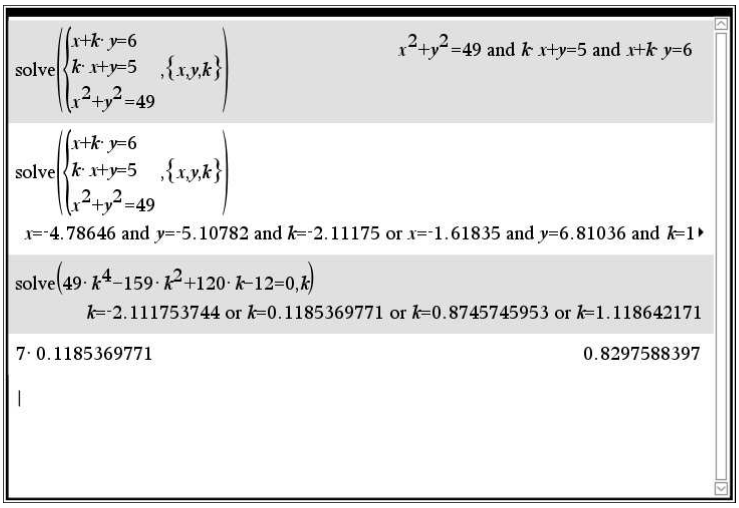
Le solveur d'un logiciel de calcul formel ne parvient pas à résoudre ce système d'équations en mode **Exact** mais parvient à un résultat en mode **Approché**.

Parmi les solutions affichées, une seule donne des valeurs de x, y, k qui sont toutes strictement positives (surlignées ci-contre).

On en déduit une valeur approchée de a maximal, à savoir 0,8297 à 10^{-4} près par défaut.

Les valeurs de a convenables sont les valeurs appartenant à l'intervalle $]0,\ a_{max}]$.

Un rectangle de largeur 0,82 se loge dans la boîte, mais non pas un rectangle de largeur 0,83.



Les réels x et y s'expriment en fonction de k : $x = \dfrac{6-5k}{1-k^2}$ et $y = \dfrac{5-6k}{1-k^2}$ en résolvant le système constitué par les deux premières équations. Le réel k est alors solution de l'équation : $\left(\dfrac{6-5k}{1-k^2}\right)^2 + \left(\dfrac{5-6k}{1-k^2}\right)^2 = 49$, équation équivalente à l'équation du quatrième degré : $49k^4 - 159k^2 + 120k - 12 = 0$.

Ce qui explique l'échec du solveur en mode **Exact**.

Une résolution approchée de cette équation par une méthode de dichotomie ou de balayage appliquée à la fonction $k \mapsto 49k^4 - 159k^2 + 120k - 12$ *pourrait être envisagée.*

Problème 2 : Rendez la monnaie

1. $C(1,\,2,\,4)=7$, $C(1,\,2,\,5)=3$ et $C(1,\,2,\,3,\,4,\,5)=15$. On remarque que tout entier compris entre 1 et 7 s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $a+2b+4c$ avec $(a,\,b,\,c)\in\{0\;1\}^3$), tandis que tout entier compris entre 1 et 15 s'écrit au moins d'une manière, et souvent plusieurs, sous la forme $a+2b+3c+4d+5e$ avec $(a,\,b,\,c,\,d,\,e)\in\{0\;1\}^5$

2. Soit M le plus grand nombre tel que tout entier de $\{1,\,2,\ldots,\,M\}$ s'écrive sous la forme $\sum_{i=1}^{i=j} x_i\,a_i$, avec $x_i\in\{0,\,1\}$ tandis que $M+1$ ne peut s'écrire ainsi.

- Supposons que $1\le a_{j+1}\le M+1$. Alors, pour tout entier n de $\{M+1,\,\ldots,\,M+a_{j+1}\}$, l'entier $n-a_{j+1}$ appartient à $\{1,\,2,\ldots,\,M\}$. Il existe des $x_i\in\{0,\,1\}$ tels que $n-a_{j+1}=\sum_{i=1}^{i=j} x_i\,a_i$ et $n=\sum_{i=1}^{i=j+1} x_i\,a_i$ avec $x_i\in\{0,\,1\}$ pour $1\le i\le j+1$. Ainsi $C(a_1,\ldots a_j,\,a_{j+1})=M+a_{j+1}>C(a_1,\ldots a_j)$
- Supposons que $M+2\le a_{j+1}$. Dans ce cas, $\left(\sum_{i=1}^{i=j} x_i\,a_i\right)+a_{j+1}>M+1$ pour toute combinaison $\sum_{i=1}^{i=j} x_i\,a_i$. $M+1$ ne peut toujours pas s'écrire $\sum_{i=1}^{i=j+1} x_i\,a_i$. $C(a_1,\ldots a_j,\,a_{j+1})=C(a_1,\ldots a_j)$

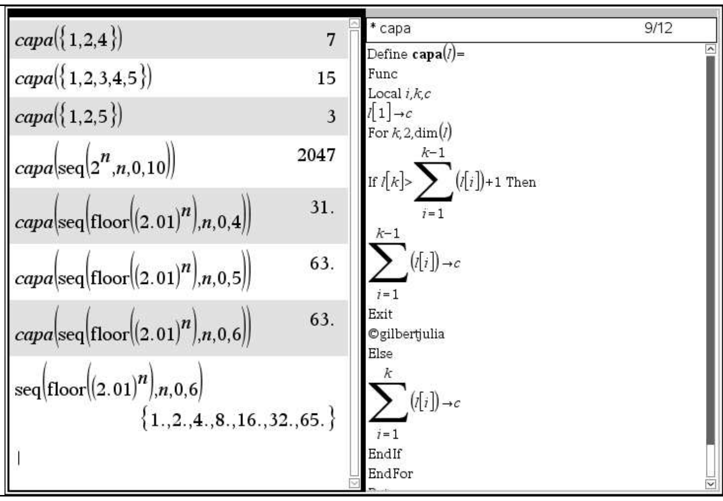
Donc $C(a_1,\ldots a_j,\,a_{j+1})\neq C(a_1,\ldots a_j)\iff 1\le a_{j+1}\le M+1$

3. On suppose les a_i rangés par ordre croissant (sinon, on commence par le faire).

Pour k tel que $1\le k\le n$, on compare $\sum_{i=1}^{i=k} a_i$ avec a_{k+1}. Si $a_{k+1}>_{gjulia}\sum_{i=1}^{i=k} a_i+1$, alors $M=\sum_{i=1}^{i=k} a_i$ est la capacité du porte-monnaie.

Sinon, on passe au rang k suivant.

Quelques exemples ci-contre.



4. La question **2** donne un élément de réponse. Etant donné un porte monnaie $\{a_1,\ldots,\,a_j\}$ de capacité M, en ajoutant une pièce, on maximise la capacité du nouveau porte monnaie avec $a_{j+1}=M+1$. Il suffit de procéder à cette construction dès le début. Ainsi, $\{1\}$; $\{1,\,2\}$; $\{1,\,2,\,4\}$ sont maximaux de capacités respectives 1, 3 et 7.

Supposons que pour un entier $n\ge 1$, $\{1,\,2,\,\ldots,\,2^{n-1}\}$ soit le porte-monnaie maximal contenant n pièces, de capacité $M_n=2^n-1$ (la somme de ses pièces donc).

D'après la question **2**, en ajoutant une pièce de plus, on maximise la capacité du nouveau porte monnaie avec $a_{n+1} = M + 1 = 2^n$. Cette capacité est portée à $M_{n+1} = \left(2^n - 1\right) + 2^n = 2^{n+1}$. Le porte-monnaie $\left\{1,\ 2,\ ...,\ 2^n\right\}$ est le porte-monnaie maximal contenant $(n+1)$ pièces.

Pour tout entier $n \geq 1$, $\left\{1,\ 2,\ ...,\ 2^{n-1}\right\}$ est le porte-monnaie maximal contenant n pièces, de capacité $M_n = 2^n - 1$.

NB. On note qu'un ensemble de n éléments contient 2^n parties dont $2^n - 1$ sont non vides. On peut constituer au plus $2^n - 1$ sommes non nulles différentes. Le porte-monnaie $\left\{1,\ 2,\ ...,\ 2^{n-1}\right\}$ atteint ce maximum, en permettant de constituer toute somme de 1 à $2^n - 1$. Il est nécessairement optimal.

4. Avec le porte monnaie $\left\{v_1, ..., v_p\right\} = \left\{1,\ 2,\ ...,\ 2^{p-1}\right\}$, le vendeur peut rendre toute somme de 1 à $M_p = 2^p - 1$.

Avec le porte monnaie $\left\{a_1, ..., a_n\right\} = 2^p \times \left\{1,\ 2,\ ...,\ 2^{n-1}\right\}$, l'acheteur peut payer toute somme appartenant à $2^p \times \left\{1,\ 2, ..., 2^n - 1\right\}$, c'est-à-dire à $\left\{2^p,\ 2^{p+1}, ..., 2^{n+p} - 2^p\right\}$. L'écart entre deux paiements possibles étant 2^p, le vendeur peut rendre la monnaie quelle que soit la transaction de montant $\leq 2^{n+p} - 2^p$

Avec ces deux porte-monnaie, toute transaction appartenant à $\left\{1,\ 2, ..., 2^{n+p} - 2^p\right\}$ est donc possible.

L'ensemble $\left\{a_1, ..., a_n\right\} \cup \left\{v_1, ..., v_p\right\}$ contient $n + p$ éléments. Il y a 2^{n+p} parties dans cet ensemble, dont 2^p parties incluses dans $\left\{v_1, ..., v_p\right\}$ (et ayant de ce fait une intersection vide avec $\left\{a_1, ..., a_n\right\}$)

Il y a transaction entre acheteur et vendeur si et seulement si l'acheteur paie quelque chose (on cherche encore un vendeur qui rend la monnaie sans qu'on ait à payer quoi que ce soit), c'est à dire si et seulement si l'ensemble des pièces concernées par la transaction a une intersection non vide avec $\left\{a_1, ..., a_n\right\}$.

On peut constituer au plus $2^{n+p} - 2^p$ transactions différentes.

Les deux porte-monnaie proposés atteignent ce maximum. Ils sont donc optimaux.

Problème 3 : La racine du carré

La fonction f dont il question est telle que sa composée par elle-même $f \circ f$ est la fonction carrée.

1. On considère l'ensemble $\{z^2,\ z \in U_{2n}\}$.

$$\{z^2,\ z \in U_{2n}\} =_{\text{glbertjulia}} \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ 0 \le k \le 2n-1\right\}$$

$$\{z^2,\ z \in U_{2n}\} = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ 0 \le k \le n-1\right\} \cup \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ n \le k \le 2n-1\right\} = U_n \cup \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ n \le k \le 2n-1\right\}$$

Dans $\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ n \le k \le 2n-1\right\}$, effectuons le changement d'indice : $j = k - n$.

$$\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ n \le k \le 2n-1\right\} = \left\{\exp\left(\frac{2i(j+n)\pi}{n}\right),\ 0 \le j \le n-1\right\}$$

Pour tout indice *j* tel que : $0 \le j \le n-1$: $\exp\left(\frac{2i(j+n)\pi}{n}\right) = \exp\left[i\left(\frac{2j\pi}{n} + 2\pi\right)\right] = \exp\left[i\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\right]$

$$\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ n \le k \le 2n-1\right\} =_{\text{gjulia}} \left\{\exp\left(\frac{2i\ j\pi}{n}\right),\ 0 \le j \le n-1\right\} = U_n .$$

$$\{z^2,\ z \in U_{2n}\} = U_n \cup U_n = U_n$$

$$z \in U_n \Rightarrow z^n = 1\ ;\ \left.\begin{array}{l} z^n = 1 \\ (z^n)^2 = z^{2n} \end{array}\right\} \Rightarrow z^{2n} = 1\ ;\ z \in U_n \Rightarrow z \in U_{2n}.$$ Ainsi, $U_n \subset U_{2n}$

2. Soit $f : U_{2n} \to U_{2n}$ telle que $f(f(z)) = z^2$ pour tout z appartenant à U_{2n}.

2.1. $f(z^2) = f[f(f(z))] = (f \circ f)(f(z)) = (f(z))^2$

2.2. En composant par *f* : $f(z) = f(z') \Rightarrow f(f(z)) = f(f(z'))$
Or la fonction $f \circ f$ est la fonction carrée : $f(f(z)) = z^2$; $f(f(z')) = z'^2$ et $z^2 = z'^2 \Rightarrow z' = \pm z$
Ainsi : $f(z) = f(z') \Rightarrow z' = \pm z$

Pour étudier l'image de 1 et de -1, on remarque que 1 et -1 ont tous deux pour carré 1 :
$0 = f(1^2) - f(1) = (f(1))^2 - f(1) = f(1) \times (f(1) - 1)$. Puisque $f(1) \in U_{2n}$, $f(1) \ne 0$. Il reste la seule possibilité : $f(1) = 1$.

De façon un peu différente : $(f(-1))^2 = f((-1)^2) = f(1) = 1$, donc $f(-1) = \pm 1$. L'éventualité $f(-1) = -1$ est à rejeter car $f(f(-1)) = (-1)^2 = 1$. Il reste la seule possibilité $f(-1) = 1$.

3. Il existe un élément z de U_{2n} tel que $z^2 = -1$ si et seulement si i est une racine $2n^{ième}$ de l'unité, c'est-à-dire si et seulement si n est un entier pair.

Si tel est le cas, supposons qu'il existe une fonction f solution.

D'une part $f(f(i)) = i^2 = -1$ et d'autre part $(f(i))^2 = f(i^2) = f(-1) = 1$ donc $f(i) = \pm 1$

L'éventualité $f(i) = 1$ est à écarter car $i \neq \pm 1$, et l'éventualité $f(i) = -1$ aussi car $f(-1) \neq -1$.

L'hypothèse d'existence d'une solution aboutit à des impasses.

4. Il existe un élément z de U_{2n} tel que $z^3 = 1$ si et seulement si la racine cubique de l'unité $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine $2n^{ième}$ de l'unité, c'est-à-dire si et seulement si n est un entier multiple de 3.

Si tel est le cas, supposons qu'il existe une fonction f solution

Du fait que $j^3 = 1$, $j^4 = j$.

D'une part $j^4 = f\left(f\left(j^2\right)\right)$.

D'autre part, $j^4 = \left(j^2\right)^2 = \left(f(f(j))\right)^2 = f\left(\left(f(j)\right)^2\right)$.

Donc : $(f(j))^2 = f\left(j^2\right) = \pm f(j)$, ce qui amène à envisager, puisque $f(j) \neq 0$, les deux possibilités : ou bien $f(j) = 1$, ce qui est à écarter puisque $j \neq \pm 1$, ou bien $f(j) = -1$, ce qui est à écarter aussi car on aurait $f\left(j^2\right) = 1$, ce qui n'est pas possible non plus, vu que $j^2 \neq \pm 1$.

L'hypothèse d'existence d'une solution aboutit à des impasses.

Ainsi, il n'y a pas de solution ni lorsque n est un multiple de 2 ni lorsque n est un multiple de 3.

5.1. Supposons n impair : $n = 2m+1$. $U_{2m+1} = \left\{ \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2m+1}\right),\ 0 \le k \le 2m \right\}$

Pour montrer que la fonction carrée, définie sur cet ensemble fini, est une fonction bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective.

Soient z_1 et z_2 deux racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. $z_1 = \exp\left(\dfrac{2ik_1\pi}{2m+1}\right)$; $z_2 = \exp\left(\dfrac{2ik_2\pi}{2m+1}\right)$

$z_1^{\,2} = z_2^{\,2} \iff 2k_1 \equiv 2k_2 \quad (2m+1)$

Multiplions les deux membres de cette congruence par $(m+1)$:

$2k_1 \equiv 2k_2 \quad (2m+1) \Rightarrow (m+1)\times(2k_1) \equiv (m+1)\times(2k_2) \quad (2m+1)$

Or $(m+1)\times(2k_1) = (2m+1)k_1 + k_1$ et $(m+1)\times(2k_2) = (2m+1)k_2 + k_2$

$2k_1 \equiv 2k_2 \quad (2m+1) \Rightarrow k_1 \equiv k_2 \quad (2m+1)$

Ainsi : $z_1^{\,2} = z_2^{\,2} \Rightarrow z_1 = z_2$

Deux carrés ne sont égaux que si leurs antécédents sont eux-mêmes égaux. La fonction carrée définie sur l'ensemble fini U_{2m+1} est injective, elle est bijective.

Lorsque n est impair, $n = 2m+1$, ceci a une conséquence à propos de U_{2n} : pour tout z appartenant à U_{2n} , des deux nombres z et $-z$, l'un est dans U_n et l'autre n'y est pas.

En effet, $U_{4m+2} = \left\{ \exp\left(\dfrac{ik\pi}{2m+1}\right),\ 0 \le k \le 4m+1 \right\}$.

Pour $z = \exp\left(\dfrac{ik\pi}{2m+1}\right)$, $-z = \exp\left(\dfrac{ik\pi}{2m+1} + \pi\right) = \exp\left(\dfrac{i(k+2m+1)\pi}{2m+1}\right)$. Des deux entiers k et $k+2m+1$, l'un est impair et l'autre pair.

5.2. Supposons qu'il existe une solution *f* au problème.

Pour tout *z* appartenant à U_{2n}, $f\left(f(z)\right)=z^2$

L'ensemble $\left\{z^2,\ z\in U_{2n}\right\}=\left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right),\ 0\leq k\leq 2n-1\right\}$ est égal à U_n.

Pour tout *z* de U_{2n}, *z* et $-z$ ont la même image par *f*. L'un des deux nombres appartenant à U_n est un carré. Son image par *f* est un carré, c'est-à-dire que l'image par *f* de tout élément de U_{2n} appartient à U_n.

Considérons dès lors la composition suivante : $\varphi=g^{-1}\circ f\circ g$, autrement dit :

$$u\in U_n\xrightarrow{g}u^2\in U_n\xrightarrow{f}f\left(u^2\right)=\left(f(u)^2\right)\in U_n\xrightarrow{g^{-1}}\varphi(u)=f(u)\in U_n$$

Cherchons l'image de cet élément par cette même application

$$f(u)\in U_n\xrightarrow{g}(f(u))^2=f\left(u^2\right)\in U_n\xrightarrow{f}f\left(f\left(u^2\right)\right)=u^4\in U_n\xrightarrow{g^{-1}}u^2\in U_n$$

Pour tout *u* appartenant à U_n, $\varphi\circ\varphi(u)=u^2$

5.3. Réciproquement, supposons qu'il existe une application φ définie sur U_n et telle que $\varphi\circ\varphi(u)=u^2$ quel que soit *u* appartenant à U_n

Soit *z* appartenant à U_{2n}

- Si *z* appartient à U_n, soit *u* son image par g^{-1}, c'est-à-dire soit *u* l'élément de U_n tel que $u^2=z$. On pose : $f(z)=(\varphi(u))^2$.
- Si *z* appartient au complémentaire de U_n dans U_{2n}, alors c'est son opposé qui appartient à U_n. Soit *u* l'image de cet opposé par g^{-1}, c'est-à-dire soit *u* l'élément de U_n tel que $u^2=-z$. On pose : $f(z)=(\varphi(u))^2$.

Vérifions que $f\left(f(z)\right)=z^2$.

Quel que soit celui des deux cas considéré, l'image de $(\varphi(u))^2$ par g^{-1} est $\varphi(u)$ puisque φ applique U_n sur lui-même $_{gj}$. $f\left((\varphi(u))^2\right)=(\varphi(\varphi(u)))^2$.

Vu que $\varphi\circ\varphi=g$, $\varphi(\varphi(u))=u^2$ et $(\varphi(\varphi(u)))^2=\left(u^2\right)^2=z^2$

5.4 et 5.5. Inutile d'envisager le cas $n=9$ qui est un multiple de 3. Pour $n=5$, on ne parvient pas à trouver (essayez …) une fonction φ qui convienne. Il reste le cas $n=7$, où l'on parvient cette fois à trouver une fonction φ qui convienne : C'est la fonction $\varphi(z)=z^3$.

En effet pour tout élément z de U_7 : $\varphi\circ\varphi(z)=z^9=z^2$, puisqu'il s'agit de racines septièmes de l'unité.

La colonne **car** affiche le coefficient des arguments des carrés des racines (c'est-à-dire l'entier k tel que $z_k=\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{7}\right)$)

La colonne **phi** affiche la fonction trouvée. On vérifie que **phi(phi)=car**.

	A rac	B car	C phi	D	E	F
=	=seq(r	=mod(2*rac,7)		=seq(phi[phi[k		
1	0	0	0	0		
2	1	2	3	2		
3	2	4	6	4		
4	3	6	2	6		
5	4	1	5	1		
6	5	3	1	3		
7	6	5	4	5		
8						

D =seq(phi[phi[k]+1],k,1,7)

Cas $n=7$. Construction de la fonction f

La colonne **u2n** affiche le coefficient des arguments des racines (c'est-à-dire les entiers k tel que $z_k=\exp\left(\dfrac{ik\pi}{7}\right)$ avec $0\le k\le 13$.

La colonne **effe** affiche celui de leurs images.

On vérifie ensuite que la fonction $f\circ f$ est identique à la fonction carrée.

		B car	C phi	D	E u2n	F effe	G	H
=	(n,	=mod(	=mod(	=seq(p	=seq(n	,7]+1]],k,0,13]	=seq(effe[effe[	=mod(2*u2n,14)
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	3	2	1	10	2	2
3	2	4	6	4	2	6	4	4
4	3	6	2	6	3	2	6	6
5	4	1	5	1	4	12	8	8
6	5	3	1	3	5	8	10	10
7	6	5	4	5	6	4	12	12
8					7	0	0	0
9					8	10	2	2
10					9	6	4	4

F $\text{effe}:=\text{seq}\left(\text{when}\left(\text{fpart}\left(\frac{k}{2}\right)=0,2\cdot \text{phi}\left[\frac{k}{2}+1\right],2\cdot\text{phi}\left[\text{mod}\left(\frac{7+k}{2},7\right)+1\right]\right),k,0,13\right)$

Fin de l'affichage

		B car	C phi	D	E u2n	F effe	G	H
=	(n,	=mod(	=mod(	=seq(p	=seq(n	,7]+1]],k,0,13]	=seq(effe[effe[	=mod(2*u2n,14)
6	5	3	1	3	5	8	10	10
7	6	5	4	5	6	4	12	12
8					7	0	0	0
9					8	10	2	2
10					9	6	4	4
11					10	2	6	6
12					11	12	8	8
13					12	8	10	10
14					13	4	12	12
15								

F $\text{effe}:=\text{seq}\left(\text{when}\left(\text{fpart}\left(\frac{k}{2}\right)=0,2\cdot \text{phi}\left[\frac{k}{2}+1\right],2\cdot\text{phi}\left[\text{mod}\left(\frac{7+k}{2},7\right)+1\right]\right),k,0,13\right)$